

Cálculo Vetorial

Um Livro Colaborativo

3 de outubro de 2023

Organizadores

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

João Batista da Paz Carvalho - UFRGS

Irene Strauch - UFRGS

Colaboradores

Este material é fruto da escrita colaborativa. Veja a lista de colaboradores em:

<https://github.com/reatmat/Calculo/graphs/contributors>

Para saber mais como participar, visite o site oficial do projeto:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/Calculo>

ou comece agora mesmo visitando nosso repositório GitHub:

<https://github.com/reatmat/Calculo>

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Nota dos organizadores

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (<https://github.com/reamat/Calculo>) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamente da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

<https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo>

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Sumário

Capa	i
Organizadores	ii
Colaboradores	iii
Licença	iv
Nota dos organizadores	v
Prefácio	vi
Sumário	viii
1 Introdução	1
1.1 Revisão	1
2 Curvas e trajetórias	4
2.1 Funções vetoriais de uma variável - curvas e trajetórias	4
2.2 Comprimento de arco	10
2.3 Triedro de Frenet-Serret	13
2.4 Curvatura e Torção	20
2.5 Fórmulas alternativas para curvatura e torção	27
3 Superfícies	47
3.1 Funções vetoriais de duas variáveis reais - superfícies	47
3.2 Vetor unitário normal e orientação	49
3.3 Caso particular em que a superfície é o gráfico de uma função	52
4 Campos vetoriais	54
4.1 Campos escalares e campos vetoriais	54
4.2 Representação gráfica dos campos vetoriais	55

4.3	Cálculo com o operador nabla	58
4.3.1	Definição matemática de divergente, gradiente e rotacional	58
4.3.2	Operadores diferenciais de segunda ordem	59
4.3.3	Identidades envolvendo o operador nabla	60
4.4	Derivada direcional e gradiente	66
4.5	Divergente e equação da continuidade	68
4.5.1	Equação da continuidade	69
4.6	Interpretação do rotacional	71
4.7	Campos conservativos	73
4.8	Campos radiais e potenciais centrais	74
5	Integral de Linha	76
5.1	A integral de linha para um campo escalar	76
5.2	A integral de linha para um campo vetorial	76
5.3	O Teorema Fundamental para Integral de Linha	77
5.4	Relação entre campos irrotacionais e conservativos	80
5.5	O Teorema de Green	84
6	Integral de Superfície	85
6.1	Definição de integral de superfície para um campo escalar	85
6.1.1	Superfície definida como função de duas variáveis	86
6.2	Definição de integral de superfície para um campo vetorial	88
6.2.1	Superfície definida como função de duas variáveis	89
6.3	O Teorema da Divergência de Gauss	98
6.4	O Teorema de Stokes	103
6.4.1	Exercícios resolvidos	104
	Respostas dos Exercícios	108
	Referências Bibliográficas	114
	Índice Remissivo	115

Capítulo 1

Introdução

Esse livro de cálculo vetorial se dedica ao estudo de curvas, superfícies, campos vetoriais, integral de linha, integral de superfície e alguns teoremas de integração, tais como o teorema de divergência de Gauss e o teorema de Stokes, além de aplicações.

1.1 Revisão

Para uma leitura mais tranquila desse livro, é esperado que o leitor tenha os seguintes conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral: limites, derivadas e integrais de função de uma, duas ou três variáveis; integração em coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas e esféricas; e outros conhecimentos mais básicos de funções elementares. Abaixo seguem alguns exercícios de revisão.

Exercícios Resolvidos

ER 1.1.1. Use as expressões $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ para obter as seguintes identidades trigonométricas:

- a) $\cos^2(x) + \sin^2 x = 1$.
- b) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$.
- c) $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$.
- d) $\cos^5(x) = \frac{1}{16} [\cos(5x) + 5 \cos(3x) + 10 \cos(x)]$.

Solução.

$$\cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^5}{32}$$

Agora usamos o Binômio de Newton para $n = 5$:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

e obtemos:

$$\begin{aligned}\cos^5(x) &= \frac{e^{5ix} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix}}{32} \\ &= \frac{e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}}{32}\end{aligned}$$

Recoletando os termos, chegamos à resposta final, pois $\cos(5x) = \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2}$, $\cos(3x) = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}$ e $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\diamond$

ER 1.1.2. Seja D a região do plano xy limitada pela circunferência de raio 1 centrada da origem, calcule o valor da integral dada por:

$$\iint_D x^2 dx dy.$$

Solução. Parametrizando em polares, temos:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho \cos \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

$\diamond$

ER 1.1.3. Seja H o hemisfério limitado pela esfera unitária centrada na origem e o plano $x = 0$ tal que $x > 0$. Calcule o valor de Φ dado pela expressão

$$\Phi = \iiint_H x dx dy dz.$$

Solução. Parametrizamos a região em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

com $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \sin \theta \cos \varphi r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$\diamond$

Exercícios

E 1.1.1. Use as expressões $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ para obter as seguintes identidades:

- a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- b) $\cosh^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh(2x)$
- c) $\sinh^2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh(2x)$
- d) $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
- e) $e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$

E 1.1.2. Resolva as seguintes integrais:

- a) $\int \sinh^2(x) dx$
- b) $\int \cosh^2(x) dx$
- c) $\int \cosh^3(x) dx$

E 1.1.3. Explique por que $|\cos(x) - 1| = 1 - \cos(x)$.

E 1.1.4. Calcule a área da região do plano xy limitada pelos eixos ordenados, as retas $x = 2$ e $y = 2$ e a hipérbole $xy = 1$.

Capítulo 2

Curvas e trajetórias

Neste capítulo, estudaremos funções vetoriais do tipo $\vec{r}(t)$, ou seja, uma função que associa um parâmetro real a vetores no plano ou espaço. Funções vetoriais que dependem de apenas uma variável são os exemplos mais simples de funções que estudaremos.

2.1 Funções vetoriais de uma variável - curvas e trajetórias

Uma função vetorial de uma variável é uma função da forma

$$\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$ é o domínio de definição de $\vec{r}$ e t é um parâmetro - podendo ser interpretado como o tempo ou não. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ e $\vec{k} = (0; 0; 1)$ são mostrados na figura [2.1](#).

Exemplo 2.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 4\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 8\pi$

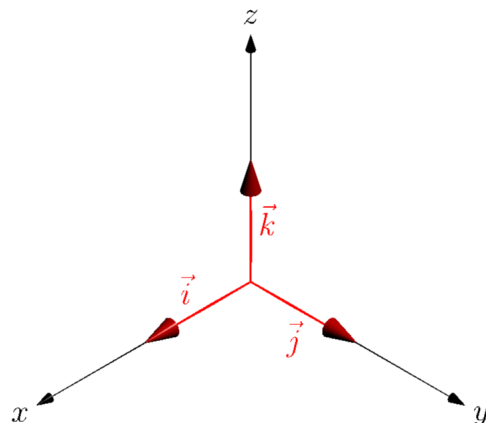


Figura 2.1: Os vetores canônicos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

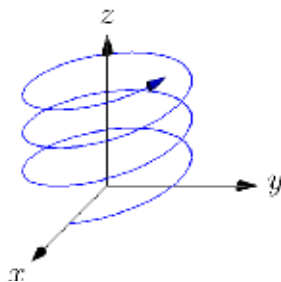


Figura 2.2: Hélice circular dextrogiro associada à função vetorial do Exemplo 2.1.3.

Uma curva no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(t)$ não constante em todo o seu domínio. Um ponto $\vec{r}(t)$ de uma parametrização é dito regular se $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \neq 0$. Uma parametrização é dita regular em t se $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \neq 0$ em todos os pontos. É possível definir orientação para uma curva regularmente parametrizada, a orientação é dada pelo sentido de crescimento do parâmetro t .

Exemplo 2.1.2. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ descreve uma circunferência de raio 1 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido anti-horário.

Exemplo 2.1.3. A função vetorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$ para $t \in \mathbb{R}$ descreve uma hélice circular, como mostra a figura 2.2.

O limite, a derivação e a integração vetorial são definidas componente a com-

ponente no sistema de coordenadas cartesiano:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} x(t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} z(t) \vec{k} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} \quad (2.2)$$

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \int_a^b x(t) dt \vec{i} + \int_a^b y(t) dt \vec{j} + \int_a^b z(t) dt \vec{k} \quad (2.3)$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \int x(t) dt \vec{i} + \int y(t) dt \vec{j} + \int z(t) dt \vec{k} \quad (2.4)$$

Teorema 2.1.1 (Regras de derivação). *A derivada de funções vetoriais satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Se $\vec{r}(t)$ é um vetor constante, então $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{0}$.
2. $\frac{d}{dt} [\alpha \vec{r}_1(t) + \beta \vec{r}_2(t)] = \alpha \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + \beta \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$
3. Se $f(t)$ é uma função real, então $\frac{d}{dt} [f(t) \vec{r}(t)] = f'(t) \vec{r}(t) + f(t) \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
4. $\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t)$
5. $\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t)$

Demonstração. Os dois primeiros itens podem ser obtidos diretamente de (2.2). A verificação fica a cargo do leitor. O item três pode ser obtido de uma aplicação da regra da cadeia a (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(t) \vec{r}(t)] &= \frac{d}{dt} [f(t)x(t) \vec{i} + f(t)y(t) \vec{j} + f(t)z(t) \vec{k}] \\ &= [f'(t)x(t) + f(t)x'(t)] \vec{i} + [f'(t)y(t) + f(t)y'(t)] \vec{j} + [f'(t)z(t) + f(t)z'(t)] \vec{k} \\ &= f'(t) [x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}] + f(t) [x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k}] \\ &= f'(t) \vec{r}(t) + f(t) \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \end{aligned}$$

A derivada do produto escalar de duas funções vetoriais é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] &= \frac{d}{dt} [x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)] \\ &= [x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t)] + [y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t)] \\ &\quad + [z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t)] \\ &= \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t) \end{aligned}$$

Finalmente a derivada do produto vetorial pode ser obtida de:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] &= \frac{d}{dt} [y_1(t)z_2(t) - z_1(t)y_2(t)] \vec{i} \\
 &+ \frac{d}{dt} [z_1(t)x_2(t) - x_1(t)z_2(t)] \vec{j} \\
 &+ \frac{d}{dt} [x_1(t)y_2(t) - y_1(t)x_2(t)] \vec{k} \\
 &= [y_1'(t)z_2(t) + y_1(t)z_2'(t) - z_1'(t)y_2(t) - z_1(t)y_2'(t)] \vec{i} \\
 &+ [z_1'(t)x_2(t) + z_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)z_2(t) - x_1(t)z_2'(t)] \vec{j} \\
 &+ [x_1'(t)y_2(t) + x_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)x_2(t) - y_1(t)x_2'(t)] \vec{k} \\
 &= [y_1'(t)z_2(t) - z_1'(t)y_2(t)] \vec{i} \\
 &+ [z_1'(t)x_2(t) - x_1'(t)z_2(t)] \vec{j} \\
 &+ [x_1'(t)y_2(t) - y_1'(t)x_2(t)] \vec{k} \\
 &+ [y_1(t)z_2'(t) - z_1(t)y_2'(t)] \vec{i} \\
 &+ [z_1(t)x_2'(t) - x_1(t)z_2'(t)] \vec{j} \\
 &+ [x_1(t)y_2'(t) - y_1(t)x_2'(t)] \vec{k} \\
 &= \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t)
 \end{aligned}$$

□

Demonstraremos agora um importante teorema do cálculo vetorial:

Teorema 2.1.2. *Uma função vetorial $\vec{u}(t)$ possui norma constante se e somente se $\vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = 0$.*

Demonstração. Como $\|u\|^2 = \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)$, temos

$$\frac{d\|u\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)] = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Assim, se $\|u\|$ for constante, a derivada à esquerda é nula e temos $\vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = 0$. Reciprocamente se $\vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = 0$, então $\|u\|$ deve ser constante. □

Observação 2.1.1. Uma importante interpretação deste teorema é que se $\vec{v}(t)$ representa a velocidade de uma partícula no instante de tempo t , então se o módulo da velocidade, $v(t)$, for constante e não nulo então a aceleração $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ é perpendicular a $\vec{v}(t)$ sempre que for não nula.

Exercícios

E 2.1.1. Calcule as derivadas das funções vetoriais do exemplo 2.1.1:

a) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 4\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$

E 2.1.2. Dada a função vetorial $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - 2\cos \pi t \vec{k}$, calcule:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$

b) $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

c) $\frac{d\vec{r}(1)}{dt}$

d) $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$

e) $\int \vec{r}(t) dt$

E 2.1.3. Encontre o domínio da função vetorial $\vec{r}(t)$ e o valor da função no ponto t_0 para:

a) $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} - 3t\vec{j}$; $t_0 = \pi$.

b) $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i} - \ln(t)\vec{j} + \sqrt{t-2}\vec{k}$; $t_0 = 3$.

E 2.1.4. Expresse as equações paramétricas abaixo como uma única equação vetorial:

a) $x(t) = 2\cos(t)$; $y(t) = t + \sin(t)$.

b) $x(t) = 2t$; $y(t) = 2\sin(3t)$; $z(t) = 5\cos(3t)$.

E 2.1.5. Encontre a declividade (coeficiente angular) da reta contida no plano $z = 0$ representada por $\vec{r} = (1 - 2t)\vec{i} + (2 - 3t)\vec{j}$

E 2.1.6. Reconheça e represente graficamente as curvas descritas pelas seguintes funções vetoriais:

- a) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
- b) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- c) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{k}$, $-\infty < t < \infty$
- d) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \sqrt{4-t^2}\vec{j}$, $-2 \leq t \leq 2$
- e) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$
- f) $\vec{f}(t) = \sinh(t)\vec{i} + \cosh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$

E 2.1.7. Dada a hélice circular $\vec{r}(t) = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + ct\vec{k}$, sendo $c > 0$, encontre c tal que a cada volta completa z avance 3 unidades.

E 2.1.8. Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de uma partícula dado por

$$\vec{r}(t) = a \cos(wt)\vec{i} + a \sin(wt)\vec{j}$$

Calcule o vetor velocidade $\vec{v}$ e o vetor aceleração $\vec{a}$ dados por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

E 2.1.9. Verifique que a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$ representa uma curva contida em uma circunferência no plano xy centrada na origem. Identifique o raio desta circunferência, identifique a curva e isole os quatro quadrantes.

E 2.1.10. Sendo $\hat{r}(t) = \frac{1}{r(t)}\vec{r}(t)$, onde $r(t) = \|\vec{r}(t)\|$, encontre as seguintes identidades:

- a) $r'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \hat{r}(t)$
- b) $\frac{d}{dt} \left[\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right] = \vec{r}(t) \times \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$
- c) $r'(t) = \frac{\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{r(t)}$
- d) $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \frac{1}{r(t)} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{r(t)^3} \vec{r}(t)$

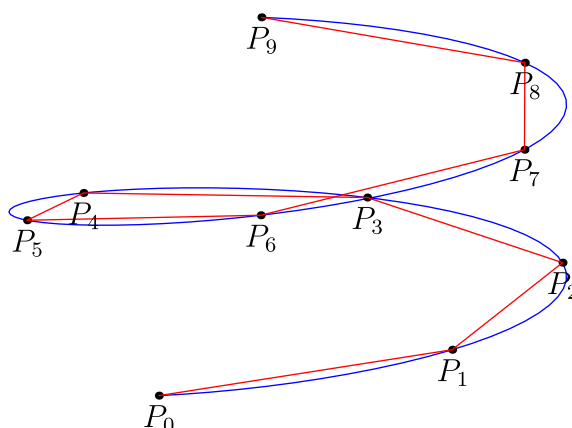


Figura 2.3: Aproximação poligonal do comprimento do arco

E 2.1.11. Dadas $\vec{u}(t) = t^2\vec{i} - 3t\vec{k}$, $\vec{v}(t) = -4t^3\vec{j} + (t+1)\vec{k}$ e $\vec{w}(t) = 3t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$, encontre:

- a) $(\vec{u} \cdot \vec{v})'$.
- b) $(\vec{u} \times \vec{v})'$.
- c) $[\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})]'$.

2.2 Comprimento de arco

Dada uma curva parametrizada pela função vetorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, estamos interessados no problema de calcular o comprimento L do arco de descrito por uma curva $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ uma partição equidistante do domínio com $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ e $P_i = \vec{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, pontos sobre a curva, como mostra a figura 2.3. Uma possível aproximação para o comprimento da curva é dado pelo comprimento da poligonal determinada por essa partição. Observe que o comprimento do segmento $P_{i-1}P_i$ é dado por $\|P_i - P_{i-1}\|$, logo, a aproximação

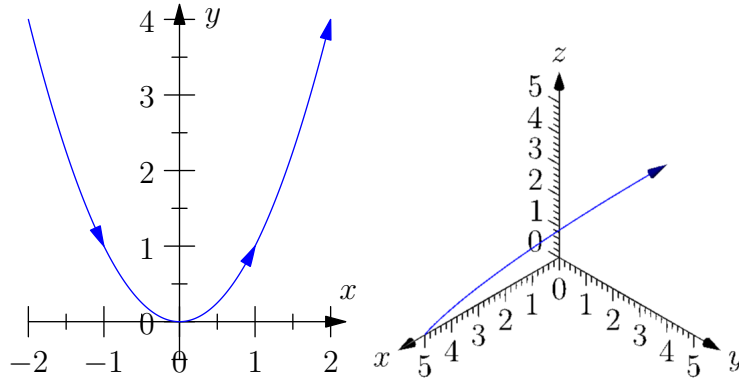


Figura 2.4: (esq) Curva do exercício ER 2.2.1; (dir) curva do exercício E 2.2.2.

para o comprimento da curva é

$$\begin{aligned}
 L_n &= \sum_{i=1}^n \|P_i - P_{i-1}\| \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \\
 &= \sum_{i=1}^n \Delta t \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\Delta t)^2}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.
 \end{aligned}$$

Naturalmente, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. Como o lado direito da última igualdade é uma soma de Riemann, temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt. \quad (2.5)$$

Logo, o comprimento do arco s quando a parâmetro corre de a até t é

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.6)$$

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, definida para $-2 \leq t \leq 2$.

Solução. A curva é um arco da parábola $y = x^2$, e pode ser visualizada na figura 2.4.

Calculamos a derivada $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j}$ e portanto:

$$L = \int_{-2}^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt = 2 \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt.$$

Com a mudança de variável $2t = \tan(u)$, $0 \leq u \leq \alpha$, onde $\alpha = \arctan(4)$ temos $2dt = \sec^2(u)du$ e então

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha |\sec(u)| \sec^2(u) du = \int_0^\alpha \sec^3(u) du \\ &= \left[\frac{\sec(u) \tan(u) + \ln |\sec(u) + \tan(u)|}{2} \right]_0^{\arctan(4)}. \end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$L = 2\sqrt{17} + \frac{\ln(4 + \sqrt{17})}{2}.$$

◇

ER 2.2.2. Calcule comprimento de arco da curva parametrizada $\vec{r}(t) = 5(1 - t^2)\vec{i} + 4t^{5/2}\vec{j} + 5t^2\vec{k}$, definida para $0 \leq t \leq 1$. Essa curva pode ser visualizada na figura 2.4.

Solução. Calculamos a derivada $\frac{d\vec{r}}{dt} = -10t\vec{i} + 10t^{3/2}\vec{j} + 10t\vec{k}$ e portanto:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{100t^3 + 100t^2 + 100t^2} dt = 10 \int_0^1 t\sqrt{t+2} dt \\ &= 10 \int_2^3 (s-2)s^{1/2} ds = 10 \int_2^3 (s^{3/2} - 2s^{1/2}) ds \\ &= \frac{32}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 2.2.1. Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada $\vec{r}(t) = (1 + t)\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j}$, definida para $-1 \leq t \leq 1$.

E 2.2.2. Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada $\vec{r}(t) = (1 - t^2)\vec{i} + (t^2 + t^3)\vec{j} + (1 + t^2 - t^3)\vec{k}$, definida para $0 \leq t \leq 1$.

E 2.2.3. Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada $\vec{r}(t) = 2t^3\vec{i} + (1 - t^3 + 2t^{9/2})\vec{j} + (t^3 + 2t^{9/2})\vec{k}$, definida para $0 \leq t \leq 1$.

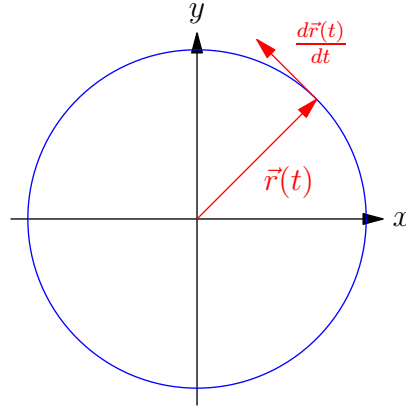


Figura 2.5: O vetor tangente $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

2.3 Triedro de Frenet-Serret

Seja a curva descrita pela função vetorial $\vec{r}(t)$. Queremos encontrar um vetor que seja tangente à curva em um dado ponto. Para tal tomamos o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Este limite converge para $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ e, geometricamente, para o vetor tangente à curva no ponto P relativo a $\vec{r}(t)$ ¹ sempre que $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \neq \vec{0}$. O sentido do vetor $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ é dado pela parametrização da curva, em outras palavras, o vetor $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ aponta no sentido em que o parâmetro t cresce.

Observe que a norma do vetor tangente depende de como a curva é parametrizada e não apenas da curva em si. A fim de trabalhar com um objeto que independe da parametrização, é natural definirmos o vetor tangente unitário, denotado por $\vec{T}$ (veja figura 2.6):

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \neq \vec{0}. \quad (2.7)$$

A condição de existência para o vetor $\vec{T}$ é que a função vetorial que parametriza a curva seja diferenciável e que sua derivada seja diferente de zero, ou seja, que a parametrização seja regular.

¹O leitor atento ao formalismo pode tomar esta como uma definição de vetor tangente. Adiante, veremos que esta definição é consistente com o vetor tangente do cálculo de funções de uma variável.

Observação 2.3.1. Quando $\vec{r}(t)$ representa a trajetória de uma partícula ao longo do tempo, a derivada $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ é a velocidade $\vec{v}(t)$ da partícula. Neste caso, o vetor tangente unitário é o versor associado a $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t) = v(t)\vec{T}(t).$$

A norma de $\vec{v}(t)$, denotada por $v(t)$, é chamada de velocidade escalar. O vetor $\vec{T}(t)$ indica o sentido e a direção da velocidade.

O vetor $\vec{T}$ pode ser definido de forma alternativa como segue: consideramos s como função de t na expressão (2.6) e observamos que $s'(t) = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| > 0$. Assim, $s(t)$ é uma função contínua e monótona de t . Por outro lado, usando a Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|.$$

Como $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ representa o vetor tangente, então

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T}$$

representa um vetor tangente unitário.

Agora, queremos definir um vetor ortogonal a $\vec{T}$ que esteja no plano determinado por $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ e $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$. Para isso, usamos o resultado do teorema 2.1.2. Observe que a função vetorial $\vec{T}(t)$ possui módulo constante e, portanto, $\vec{T}(t) \cdot \frac{d\vec{T}(t)}{dt} = 0$. Observe ainda que

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d(v\vec{T})}{dt} = v'(t)\vec{T}(t) + v(t)\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{v'(t)}{v(t)} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + v(t)\frac{d\vec{T}(t)}{dt}$$

implica

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{1}{v(t)} \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} - \frac{v'(t)}{v(t)^2} \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

e assim $\vec{T}(t)$ e $\frac{d\vec{T}(t)}{dt}$ pertencem ao plano gerado por $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ e $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ e são ortogonais entre si. Entretanto, $\frac{d\vec{T}(t)}{dt}$ não é necessariamente unitário. Logo, faz sentido definir o vetor normal unitário como

$$\vec{N} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|} \frac{d\vec{T}(t)}{dt}.$$

A figura 2.6 contém a representação do triedro de Frenet-Serret em alguns pontos de uma hélice dextrógira.

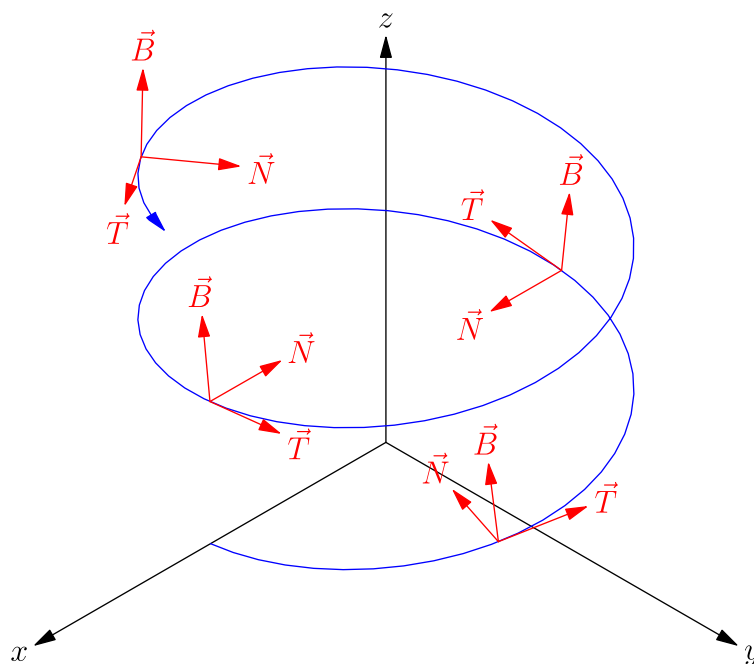


Figura 2.6: Triedro de Frenet-Serret

Finalmente, vamos definir um vetor unitário que é simultaneamente ortogonal a $\vec{T}$ e $\vec{N}$. A forma natural de obter um vetor ortogonal a outros dois vem do produto vetorial. Assim, o vetor binormal unitário é definido como

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Das propriedades de produto vetorial, temos que $\vec{B}$, além de ortogonal a $\vec{T}$ e $\vec{N}$, é unitário e forma um sistema dextrogiro. O trio $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ é chamado de triedro de Frenet-Serret. A figura 2.6 apresenta a representação de alguns triedros de Frenet-Serret.

Exercícios resolvidos

ER 2.3.1. Considere a curva $\vec{r}(t)$ definida no exercício E 2.2.2. Encontre o triedro de Frenet-Serret $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$.

Solução. Primeiro calculamos $\vec{v}(t) := \vec{r}'(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2t\vec{i} + t(2 + 3t)\vec{j} + t(2 - 3t)\vec{k},$$

cujas norma é dada por:

$$\|\vec{v}\|^2 = 4t^2 + t^2(2+3t)^2 + t^2(2-3t)^2 = t^2(12+18t^2).$$

Logo $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{-2}{\sqrt{12+18t^2}}\vec{i} + \frac{2+3t}{\sqrt{12+18t^2}}\vec{j} + \frac{2-3t}{\sqrt{12+18t^2}}\vec{k}$.

Derivando essa última expressão em relação a t , temos:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{36t}{(12+18t^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{36(1-t)}{(12+18t^2)^{3/2}}\vec{j} - \frac{36(1+t)}{(12+18t^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

E para normalizar sem trocar seu sentido definimos:

$$\vec{u} = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} - (1+t)\vec{k},$$

o que implica:

$$\|\vec{u}\|^2 = t^2 + (1-t)^2 + (1+t)^2 = 3t^2 + 2.$$

Então:

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{v}}{dt}\right\|} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\vec{i} + \frac{1-t}{\sqrt{3t^2+2}}\vec{j} - \frac{1+t}{\sqrt{3t^2+2}}\vec{k}.$$

Finalmente $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ calculado via

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-2}{\sqrt{12+18t^2}} & \frac{2+3t}{\sqrt{12+18t^2}} & \frac{2-3t}{\sqrt{12+18t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}} & \frac{1-t}{\sqrt{3t^2+2}} & \frac{-1-t}{\sqrt{3t^2+2}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-4-6t^2)\vec{i} - (2+3t^2)\vec{j} - (2+3t^2)\vec{k}}{\sqrt{12+18t^2}\sqrt{3t^2+2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}. \end{aligned}$$

◇

ER 2.3.2. Um erro comum entre estudantes é substituir a definição de vetor binormal unitário $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ pela expressão espúria dada por

$$\frac{\frac{d\vec{N}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{N}}{dt}\right\|}.$$

Calcule esta expressão para o movimento circular uniforme e verifique que ela é igual a $-\vec{T}$ e, portanto, perpendicular a $\vec{B}$.

Solução. Considere a e w constantes positivas e a trajetória dada por:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= a \cos(wt)\vec{i} + a \sin(wt)\vec{j} \\ \vec{r}'(t) &= -aw \sin(wt)\vec{i} + aw \cos(wt)\vec{j} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= |aw| = aw.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \\ &= \frac{-aw \sin(wt)\vec{i} + aw \cos(wt)\vec{j}}{aw} \\ &= -\sin(wt)\vec{i} + \cos(wt)\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \\ &= \frac{-w \cos(wt) - w \sin(wt)}{w} \\ &= -\cos(wt) - \sin(wt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\vec{N}'(t)}{\|\vec{N}'(t)\|} &= \frac{w \sin(wt) - w \cos(wt)}{w} \\ &= \sin(wt) - \cos(wt) = -\vec{T}\end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 2.3.1. Calcule $\vec{r}'(t_0)$ e esboce o gráfico de $\vec{r}(t)$ juntamente com o vetor tangente $\vec{r}'(t_0)$.

- a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t_0 = 2$.
- b) $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{2t}\vec{j}$, $t_0 = \ln(2)$.
- c) $\vec{r}(t) = 2\sin(t)\vec{i} + \vec{j} + 2\cos(t)\vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

E 2.3.2. Encontre os vetores unitários $\vec{T}$ e $\vec{N}$ para as curvas abaixo em $t = t_0$.

a) $\vec{r}(t) = 5 \cos(t)\vec{i} + 5 \sin(t)\vec{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

b) $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + t\vec{j}$, $t_0 = 1$.

E 2.3.3. Represente graficamente o terno de vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ e verifique através da regra da mão direita as seguintes identidades:

a) $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

b) $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

c) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

Use a identidade vetorial dada por

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

para obter as identidades b e c a partir de a .

E 2.3.4. O vetor binormal unitário foi definido em aula como $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$. Argumente, sem cálculos, que ele também poderia ser definido como

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}.$$

E 2.3.5. Use a fórmula do exercício 2.3.4 para calcular $\vec{B}(t)$ para a curva $C : \vec{r}(t) = (\sin(t) - t \cos(t))\vec{i} + (\cos(t) + t \sin(t))\vec{j} + \vec{k}$.

E 2.3.6. Considere a trajetória dada pela equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= t \sin(t) \\ y &= t \cos(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Esboce gráfico dessa trajetória para $0 \leq t \leq 2\pi$, indicando os pontos inicial e final. Esboce o triedro $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ nos instantes $t = \pi/4$, $t = 3\pi/4$, $t = 5\pi/4$, $t = 7\pi/4$. (Obs.: Não é necessário calcular analiticamente o triedro.) Considere a identidade vetorial $\frac{d}{dt}\|\vec{r}(t)\| = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$. O sinal dessa expressão é compatível com seu desenho?

E 2.3.7. Um erro comum entre estudantes é substituir a definição de vetor binormal unitário $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ pela expressão espúria dada por

$$\frac{\frac{d\vec{N}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{N}}{dt}\right\|}.$$

Calcule esta expressão para o movimento circular uniforme e verifique que ela é igual a $-\vec{T}$ e, portanto, perpendicular a $\vec{B}$.

E 2.3.8. Considere a curva $\vec{r}(t)$ definida no exercício E 2.2.3. Obtenha o triedro de Frenet-Serret $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$.

E 2.3.9. Represente graficamente o terno de vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ e verifique através da regra da mão direita as seguintes identidades:

a) $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

b) $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

c) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

Use a identidade vetorial dada por

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

para obter as identidades *b* e *c* a partir de *a*.

[Dica: Use o fato que $\vec{T} \cdot \vec{T} = \vec{N} \cdot \vec{N} = \vec{B} \cdot \vec{B} = 1$ e $\vec{T} \cdot \vec{N} = \vec{T} \cdot \vec{B} = \vec{N} \cdot \vec{B} = 0$.

E 2.3.10. Considere a trajetória dada pela equações paramétricas

$$x = t \sin(t)$$

$$y = t \cos(t)$$

$$z = 0$$

Esboce gráfico dessa trajetória para $0 \leq t \leq 2\pi$, indicando os pontos inicial e final. Esboce o triedro $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no instante $t = \pi/2$. (Obs.: Não é necessário calcular analiticamente o triedro.) Considere a identidade vetorial $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ no instante $t = \pi/2$, ela é compatível com seu desenho?

E 2.3.11. Um erro comum é substituir a definição de vetor normal unitário pela expressão espúria dada por:

$$\frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}''(t)\|}.$$

Encontre uma condição necessária suficiente para que essa fórmula produza o resultado correto supondo $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$.

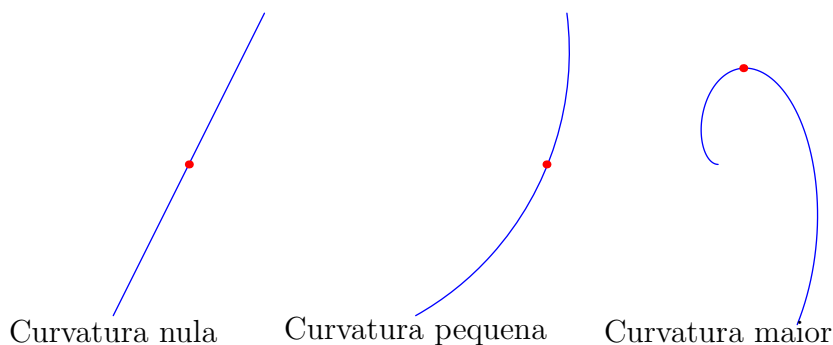


Figura 2.7: Noção de curvatura em um ponto.

E 2.3.12. O que acontece com os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ quando se inverte a orientação da curva?

2.4 Curvatura e Torção

Nessa seção, estamos interessados em definir, a cada ponto da curva, funções que medem o quanto ela está torcida ou curvada, isto é, se a curva é muito diferente de uma reta ou se está fora de qualquer plano do espaço. Primeiro, definiremos uma função chamada de curvatura, que mede a cada ponto do domínio, a norma da variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco s . Naturalmente, queremos que a reta tenha curvatura nula, pois ela não difere da sua tangente em ponto algum. Para facilitar a visualização, podemos começar pensando apenas nas curvas que estão contidas em algum plano. A figura 2.7 apresenta uma noção de curvatura em um ponto.

O vetor normal $\vec{N}$, sendo paralelo a $\frac{d\vec{T}}{dt}$ por definição, também é paralelo a $\frac{d\vec{T}}{ds}$, onde s é comprimento do arco definido pela curva da trajetória de $\vec{r}(t)$. Assim,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N}, \quad (2.8)$$

onde $\kappa(t) > 0$ é uma função escalar chamada de curvatura. Por outro lado, calculamos a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco s usando a regra da cadeia

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{1}{|s'(t)|},$$

onde $s(t)$ é a função que mede o comprimento do arco dado pela expressão (2.6).

Usando o fato que² $s'(t) = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$, temos:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|}.$$

Definimos também, para cada ponto t do domínio, o raio de curvatura $\rho(t)$ da forma:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

O raio de curvatura tem a seguinte interpretação geométrica: considere um ponto $\vec{r}(t_0)$ onde a curvatura não é nula e defina o ponto $\vec{r}(t_0) + \kappa(t_0)\vec{N}$, chamado de centro de curvatura. O círculo centrado no centro de curvatura e raio $\rho(t_0)$ é tangente a curva em t_0 e possui a mesma curvatura (veja a figura 2.8).

Exemplo 2.4.1. A curva descrita por $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é uma circunferência. Sua curvatura pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -a \sin(t)\vec{i} + a \cos(t)\vec{j}, \quad (2.9)$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} = \sqrt{a^2} = |a| = a, \quad (2.10)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{-a \sin(t)\vec{i} + a \cos(t)\vec{j}}{a} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

Exemplo 2.4.2. Dada a curva $y = x^2$, vamos encontrar a curvatura e o raio de curvatura no ponto $x = 1$. Primeiro, encontramos uma parametrização para essa curva, por exemplo, $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}$. Calculamos:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j},$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{1 + 4t^2},$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} (\vec{i} + 2t\vec{j})$$

²Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2

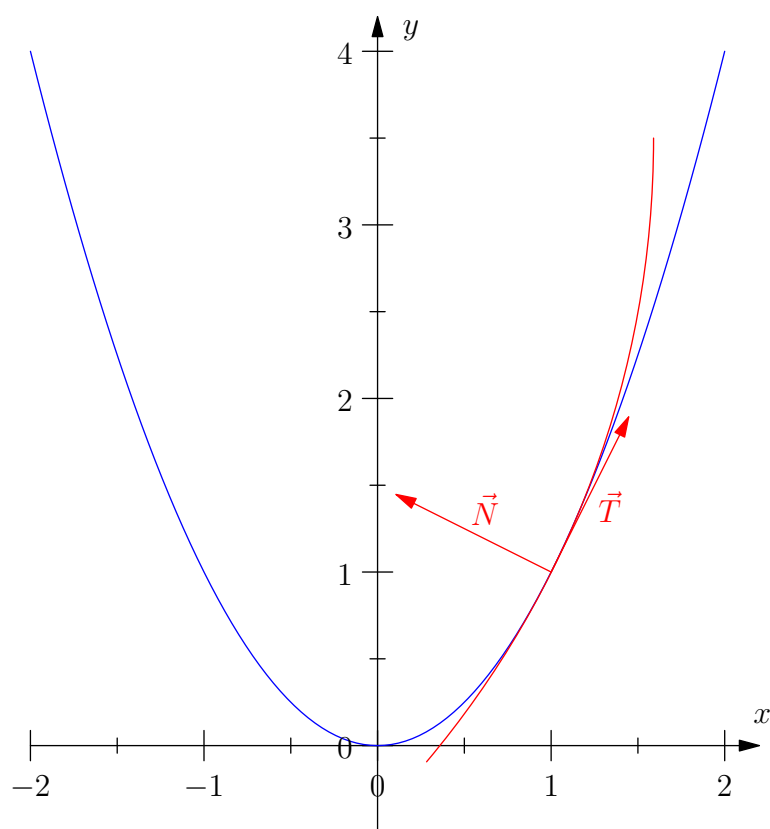


Figura 2.8: Círculo de curvatura

e

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = -\frac{4t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8t^2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{j},$$

Em $t = 1$, temos:

$$\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\| = \sqrt{5},$$

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \left(-\frac{8}{\sqrt{5^3}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} = -\frac{4}{\sqrt{5^3}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5^3}}\vec{j},$$

e

$$\left\|\frac{d\vec{T}(t)}{dt}\right\| = \sqrt{\frac{16}{5^3} + \frac{4}{5^3}} = \frac{2}{5}.$$

Portanto,

$$\kappa(1) = \frac{\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

e

$$\rho(1) = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

veja representação geométrica na figura 2.8.

O leitor deve ter observado que conhecendo somente a curvatura não é possível reconstruir uma curva a partir de um ponto dado. Uma curva pode não estar contida em plano algum no espaço e, por isso, precisamos definir uma função escalar, chamada torção, que mede a magnitude da variação do vetor binormal. A figura 2.9 apresenta uma ideia de torção: uma curva contida em algum plano no espaço tem torção nula e quando maior a variação com respeito ao plano definido por $\vec{T}$ e $\vec{N}$, maior a torção. O leitor deve tomar cuidado na interpretação da figura 2.9, pois se esticarmos indefinidamente a hélice circular representada, ela voltará a se aproximar de uma reta, que tem torção nula (veja problema 2.4.2). Sabendo que a torção será definida em termos da variação do vetor binormal com respeito ao comprimento de arco $s(t)$, fazendo algumas observações:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{T} \times \vec{N}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

Usando a expressão (2.8), temos que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$, logo

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

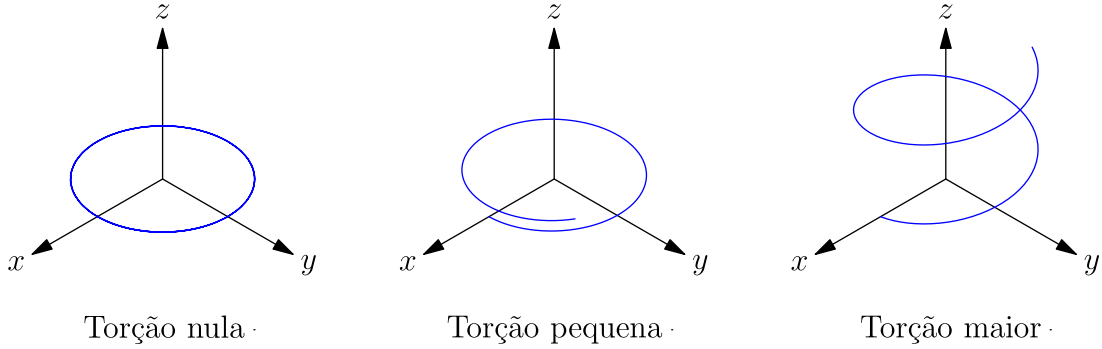


Figura 2.9: Ideia de torção.

Isso implica que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a $\vec{T}$. Mas, pelo teorema 2.1.2, temos que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é ortogonal a $\vec{B}$. Logo, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ é paralelo a $\vec{N}$, ou seja, podemos definir

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}, \quad (2.13)$$

onde τ é chamado de torção. O sinal negativo tem um propósito: quando $\tau > 0$, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ está no sentido de $-\vec{N}$; então se P é um ponto sobre a curva movendo-se no sentido positivo, $\vec{B}$ gira em torno de $\vec{T}$ como um parafuso de rosca direita sendo apertado (veja a figura 2.10). Em alguns contextos, calculamos a módulo da torção, dada por

$$|\tau| = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{B}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|}.$$

Ainda, definimos o raio de torção por

$$\sigma(t) = \frac{1}{\tau(t)}.$$

Podemos calcular $\frac{d\vec{N}}{ds}$ em termos da curvatura e da torção:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{B} \times \vec{T}) = \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Usando as expressões (2.8) e (2.13), escrevemos

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\tau \vec{N} \times \vec{T} + \vec{B} \times \kappa \vec{N}.$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}. \quad (2.14)$$

As equações (2.8), (2.13) e (2.14) são chamadas de Fórmulas de Frenet-Serret.

Como esperávamos, se $\kappa = 0$, então $\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$, o que implica que $\vec{T}$ não varia ao longo da curva, ou seja, a curva é uma reta. Agora, se $\tau = 0$, então $\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{0}$ e $\vec{B}$ é um vetor constante. Como $\vec{B} \cdot \vec{T} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0$, então podemos integrar para obter $\vec{B} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, onde $\vec{r}_0$ é um vetor constante da integração. Logo $\vec{r}$ está contido no plano ortogonal a $\vec{B}$.

Exercícios resolvidos

ER 2.4.1. Calcule a curvatura, raio de curvatura e o módulo da torção para a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$.

Primeiro calculamos a derivada de $\vec{r}(t)$:

Solução.

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k},$$

cujo módulo é dado por:

$$\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2},$$

Agora calculamos o vetor tangente unitário pela definição:

$$\vec{T}(t) = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

Para calcular o módulo da torção, calculamos a derivada do vetor tangente unitário:

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

cujo módulo é dado por:

$$\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Finalmente temos a curvatura:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}}{dt} \right\|}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

O raio de curvatura vale, portanto:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = 2.$$

Para calcular a torção, primeiro calculamos o vetor normal unitário e o vetor binormal unitário:

$$\vec{N}(t) = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}.$$

$$\begin{aligned}\vec{B}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.\end{aligned}$$

Calculamos agora a derivada do vetor binormal unitário:

$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

cujo módulo é dado por:

$$\left\| \frac{d\vec{B}(t)}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

O módulo da torção é dado por:

$$|\tau(t)| = \frac{\frac{d\vec{B}(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{2}.$$

◇

Exercícios

E 2.4.1. Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o módulo da torção das curvas abaixo:

a) $\vec{r} = a \cosh(t)\vec{i} + b \sinh(t)\vec{j}$, $-\infty < t < \infty$, $a > 0$, $b > 0$.

b) $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

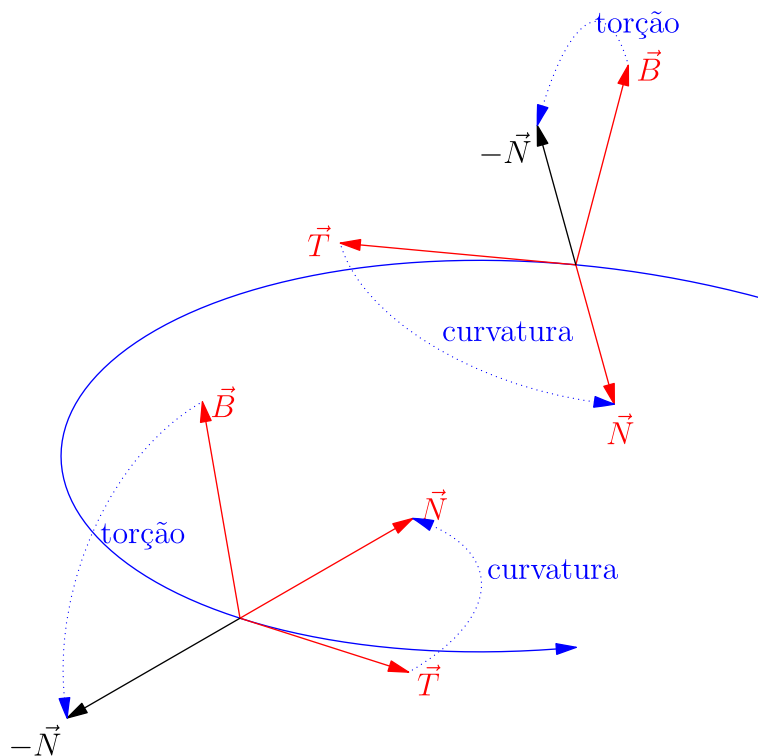


Figura 2.10: Curvatura e Torção

c) $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$, $c > 0$.

E 2.4.2. Dada a hélice circular $\vec{r} = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + ct\vec{k}$, $t \geq 0$, $a > 0$. Dado um a constante, calcule os valores de c para que a torção seja máxima e mínima.

2.5 Fórmulas alternativas para curvatura e torção

A curvatura e a torção podem ser calculadas de maneira mais simples. Para concluir isso, começamos calculando as derivadas de $\vec{r}$. Usamos aqui que $s'(t) = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$, obtida da equação (2.6):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = s' \vec{T},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= s''\vec{T} + s'\frac{d\vec{T}}{dt} \\
&= s''\vec{T} + s'\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\|\vec{N} \\
&= s''\vec{T} + (s')^2\kappa\vec{N}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} &= s'''\vec{T} + s''\frac{d\vec{T}}{dt} + 2s's''\kappa\vec{N} + s'^2\left(\kappa\frac{d\vec{N}}{dt} + \kappa'\vec{N}\right) \\
&= s'''\vec{T} + s''s'\kappa\vec{N} + (2s's''\kappa + s'^2\kappa')\vec{N} \\
&\quad + s'^3\kappa(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) \\
&= (s''' - \kappa^2s'^3)\vec{T} + (3s's''\kappa + s'^2\kappa')\vec{N} + s'^3\kappa\tau\vec{B},
\end{aligned}$$

onde usamos as expressões (2.8) e (2.14). Agora, tomamos os seguintes produtos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = s'^3\kappa\vec{B} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = s'^6\kappa^2\tau.$$

Isso implica em

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\| = |s'|^3\kappa \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|^2 \tau.$$

ou seja,

$$\kappa = \frac{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3} \quad (2.15)$$

e

$$\tau = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|^2}. \quad (2.16)$$

Observação 2.5.1. Uma aplicação natural é a decomposição da aceleração em suas componentes tangencial e normal. Observe que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = v\vec{T} = s'\vec{T}$$

e

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v^2\kappa\vec{N}.$$

Concluimos que a aceleração está no plano normal a $\vec{B}$ e possui componentes tangencial e normal:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N},$$

onde $a_T = v'$ e $a_N = v^2\kappa$. Então, se a velocidade possui normal constante, temos que $v' = 0$ e a aceleração possui apenas componente normal.

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 29

Exemplo 2.5.1. Consideramos a elipse no plano xy cuja equação canônica é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aqui a e b são constantes positivas e representam os comprimentos dos semieixos da elipse. Inserimos a parametrização $x(t) = a \cos(t)$ e $y(t) = b \sin(t)$ para obter o vetor $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{j}.$$

as derivadas de $\vec{r}(t)$ são, portanto, dadas por:

$$\vec{r}'(t) = -a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}''(t) = -a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= (-a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j}) \times (-a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j}) \\ &= ab \sin^2(t)\vec{k} + ab \cos^2(t)\vec{k} = ab\vec{k}\end{aligned}$$

Onde usamos a identidade trigonométrica $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ e as identidades vetoriais $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ e $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$. Agora calculamos $\|\vec{r}'(t)\|$:

$$\|\vec{r}'(t)\| = [a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{1/2}$$

Desta forma, temos:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{ab}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}}$$

Vale observar que os pontos de máxima e mínima curvatura estão nos vértices, isto é, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$. A prova dessa afirmação será objeto de exercício.

Podemos expressar a curvatura da elipse em termos das variáveis originais x e y :

$$\begin{aligned}\kappa(x, y) &= \frac{ab}{\left(\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^{3/2}} \\ \kappa(x) &= \frac{ab}{\left(a^2 + \left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)x^2\right)^{3/2}} \\ \kappa(y) &= \frac{ab}{\left(b^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)y^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.2. Consideremos agora, a curva gerada pelas seguintes equações paramétricas:

$$x(t) = \cos(t) \quad y(t) = \sin(t) \quad z(t) = f(t).$$

Onde $f(t)$ é uma função dada. Observe que a projeção desta curva no plano xy é uma circunferência de raio 1. A curva é, portanto, gerada pela trajetória de ponto cuja projeção do movimento no plano xy é circular e a altura é dada pela função $f(t)$. Podemos calcular a curvatura e a torção conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + f(t)\vec{k} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + f''(t)\vec{k} \\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + f'''(t)\vec{k} \end{aligned}$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= [f''(t)\cos(t) + f'(t)\sin(t)]\vec{i} + [-f'(t)\cos(t) + f''(t)\sin(t)]\vec{j} + \vec{k} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} &= f'(t) + f'''(t) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\| &= \sqrt{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2} \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| &= \sqrt{1 + (f'(t))^2} \end{aligned}$$

E finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2}}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau &= \frac{f'(t) + f'''(t)}{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2} \end{aligned}$$

Podemos, agora, explorar diversos casos particulares:

- Caso $f(t) = c$ constante. Neste caso, recaímos na circunferência de raio 1, cuja curvatura é 1 e a torção é nula.
- Caso $f(t) = ct$ com c constante. Recaímos na hélice circular uniforme, já estudada, cuja curvatura é $\frac{1}{1+c^2}$ e a torção é $\frac{c}{1+c^2}$.

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 31

- c) Caso $f(t) = ct^2$ com c constante. Reaímos na hélice cicular com espaçamento linearmente crescente, cuja curvatura é dada por $\frac{\sqrt{4c^2+1+4c^2t^2}}{(1+4c^2t^2)^{3/2}}$ e cuja torção é dada por $2\frac{ct}{4c^2+1+4c^2t^2}$.
- d) Caso $f(t) = \sin(t)$. Reaímos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{2}$ no plano $y = z$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos(t)^2)^{3/2}}$ e a torção é nula.
- e) Caso $\tau = 0$, isto é, $f'(t) + f'''(t) = 0$, o que é equivalente a $f(t) = a + b\cos(t) + c\sin(t)$ onde a, b e c são constantes. Reaímos na elipse de semieixos 1 e $\sqrt{1+b^2+c^2}$ no plano $z = bx + cy$. Neste caso, a curvatura é $\kappa = \frac{\sqrt{b^2+c^2+1}}{(1-bc\sin(2t)+c^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t))^{3/2}}$ e a torção é nula.

Exercícios resolvidos

ER 2.5.1. Considere a hélice dada por

$$\begin{aligned}x &= a \cos(wt) \\ y &= a \sin(wt) \\ z &= ct.\end{aligned}$$

Onde a e w são constantes positivas.

- a) Encontre a curvatura desta hélice usando a fórmula

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

- b) Encontre o módulo da torção desta curva usando a seguinte fórmula para calcular o vetor binormal unitário:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$$

e a seguinte fórmula para o módulo da torção:

$$|\tau| = \frac{\|B'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\|$$

- c) Discuta o sinal da torção em função do sinal de cw .
- d) Confira a conclusão do item c), sabendo que $\vec{N} = -\cos(wt)\vec{i} - \sin(wt)\vec{j}$

Solução. Observe que:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= a \cos(wt)\vec{i} + a \sin(wt)\vec{j} + ct\vec{k}, \\ \vec{r}'(t) &= -aw \sin(wt)\vec{i} + aw \cos(wt)\vec{j} + c\vec{k}, \\ \vec{r}''(t) &= -aw^2 \cos(wt)\vec{i} - aw^2 \sin(wt)\vec{j}.\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -aw \sin(wt) & aw \cos(wt) & c \\ -aw^2 \cos(wt) & -aw^2 \sin(wt) & 0 \end{vmatrix} \\ &= acw^2 \sin(wt)\vec{i} - acw^2 \cos(wt)\vec{j} + a^2w^3 \underbrace{(\cos^2(wt) + \sin^2(wt))}_1 \vec{k} \\ &= acw^2 \sin(wt)\vec{i} - acw^2 \cos(wt)\vec{j} + a^2w^3\vec{k}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| &= \sqrt{a^2c^2w^4 \sin^2(wt) + a^2c^2w^4 \cos^2(wt) + a^4w^6} \\ &= \sqrt{a^2c^2w^4 + a^4w^6} = |a|w^2\sqrt{c^2 + a^2w^2} = aw^2\sqrt{c^2 + a^2w^2}\end{aligned}$$

Usamos a fórmula da curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \\ &= \frac{aw^2\sqrt{c^2 + a^2w^2}}{\| -aw \sin(wt)\vec{i} + aw \cos(wt)\vec{j} + c\vec{k} \|^3} \\ &= \frac{aw^2\sqrt{c^2 + a^2w^2}}{(a^2w^2 + c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{aw^2}{a^2w^2 + c^2}\end{aligned}$$

Agora usamos a fórmula da torção:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} \\ &= \frac{acw^2 \sin(wt)\vec{i} - acw^2 \cos(wt)\vec{j} + a^2w^3\vec{k}}{|a|w^2\sqrt{c^2 + a^2w^2}} \\ &= \frac{ac \sin(wt)\vec{i} - ac \cos(wt)\vec{j} + a^2w\vec{k}}{a\sqrt{c^2 + a^2w^2}}\end{aligned}$$

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 33

Sabemos que o módulo da torção é dado por:

$$\begin{aligned} |\tau| &= \left\| \frac{d}{ds} \vec{B} \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{dt} \vec{B} \right\| / \|r'(t)\| \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{B} = \frac{acw \cos(wt) \vec{i} + acw \sin(wt) \vec{j}}{a\sqrt{c^2 + a^2w^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \|r'(t)\| &= \left\| -aw \sin(wt) \vec{i} + aw \cos(wt) \vec{j} + c \vec{k} \right\| \\ &= \sqrt{c^2 + a^2w^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{B} = \frac{acw \cos(wt) \vec{i} + acw \sin(wt) \vec{j}}{a(c^2 + a^2w^2)}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} |\tau| &= \left\| \frac{d}{ds} \vec{B} \right\| = \frac{|acw|}{a(c^2 + a^2w^2)} \\ &= \frac{|c|w}{c^2 + a^2w^2} \end{aligned}$$

Observando a orientação da curva, vemos que a ela é dextrógira se $c > 0$, levógira se $c < 0$, o sinal da torção é o sinal de c :

$$\tau = \frac{cw}{c^2 + a^2w^2}$$

Podemos verificar essa conclusão sabendo que:

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{d}{ds} \vec{B} \cdot \vec{N} \\ &= -\left(\frac{acw \cos(wt) \vec{i} + acw \sin(wt) \vec{j}}{a(c^2 + a^2w^2)} \right) \cdot (-\cos(wt) \vec{i} - \sin(wt) \vec{j}) \\ &= \frac{cw \cos^2(wt) + cw \sin^2(wt)}{(c^2 + a^2w^2)} \\ &= \frac{cw}{c^2 + a^2w^2} \end{aligned}$$

◇

ER 2.5.2. Mostre que se a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente, então

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração. Verifique essa identidade na trajetória dada por

$$\vec{r}(t) = 3 \cos(t) \vec{i} + 3 \sin(t) \vec{j} + t^2 \vec{k}.$$

[Dica: use o fato que $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.]

Solução. Basta usar a seguinte identidade e simplifique:

$$\|\vec{a}\|^2 = \|a_T \vec{T} + a_N \vec{N}\|^2 = (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) \cdot (a_T \vec{T} + a_N \vec{N})$$

A trajetória em questão é dada por:

$$\vec{r}(t) = 3 \cos(t) \vec{i} + 3 \sin(t) \vec{j} + t^2 \vec{k}$$

Para obter os valores pedidos, calculamos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= -3 \sin(t) \vec{i} + 3 \cos(t) \vec{j} + 2t \vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= -3 \cos(t) \vec{i} - 3 \sin(t) \vec{j} + 2 \vec{k} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= (9 \sin^2(t) + 9 \cos^2(t) + 4t^2)^{1/2} = (9 + 4t^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$a_N = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin(t) & 3 \cos(t) & 2t \vec{k} \\ -3 \cos(t) & -3 \sin(t) & 2 \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= (6 \cos(t) + 6t \sin(t)) \vec{i} + (-6t \cos(t) + 6 \sin(t)) \vec{j} + \underbrace{(9 \sin^2(t) + 9 \cos^2(t))}_{9} \vec{k} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| &= [(6 \cos(t) + 6t \sin(t))^2 + (-6t \cos(t) + 6 \sin(t))^2 + 81]^{1/2} \\ &= [36 \cos^2(t) + 72 \sin(t) \cos(t) + 36t^2 \sin^2(t) \\ &\quad + (36t^2 \cos^2(t) - 72 \cos(t) \sin(t) + 36 \sin^2(t)) + 81]^{1/2} \\ &= [36 + 36t^2 + 81]^{1/2} = (117 + 36t^2)^{1/2} \end{aligned}$$

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 35

Portanto

$$a_N = \frac{(117 + 36t^2)^{1/2}}{(9 + 4t^2)^{1/2}}$$

e

$$\kappa = \frac{(117 + 36t^2)^{1/2}}{(9 + 4t^2)^{3/2}}$$

A aceleração tangencial pode ser obtida conforme

$$a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{9 \operatorname{sen}(t) \cos(t) - 9 \operatorname{sen}(t) \cos(t) + 4t}{(9 + 4t^2)^{1/2}} = \frac{4t}{(9 + 4t^2)^{1/2}}.$$

Agora, retornamos ao pedido nesta lista:

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 &= \left\| -3 \cos(t) \vec{i} - 3 \operatorname{sen}(t) \vec{j} + 2 \vec{k} \right\|^2 \\ &= 3^2 + 2^2 = 13. \end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned} a_N^2 + a_T^2 &= \left(\frac{(117 + 36t^2)^{1/2}}{(9 + 4t^2)^{1/2}} \right)^2 + \left(\frac{4t}{(9 + 4t^2)^{1/2}} \right)^2 \\ &= \frac{117 + 36t^2}{9 + 4t^2} + \frac{16t^2}{9 + 4t^2} = \frac{117 + 52t^2}{9 + 4t^2} \\ &= \frac{13(9 + 4t^2)}{9 + 4t^2} = 13, \end{aligned}$$

o que verifica a identidade.

◇

ER 2.5.3. Mostre que a curvatura do gráfico da função

$$y = f(x)$$

sobre o plano xy é dada pela expressão

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Use essa expressão para obter a curvatura das seguintes curvas planas:

a) $y = ax + b$

b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a < x < a$ onde $a > 0$.

c) $y = x^4$

d) $y = ax^2$

e) $y = \cosh(x)$

f) $y = \sinh(x)$

g) $y = \cos(x)$

Como você interpreta os casos a e b? As curvas dos itens c e g possuem pontos onde a curvatura é zero. Que implicação isso tem sobre a existência do vetor normal unitário $\vec{N}$? Interprete geometricamente.

[Dica.: Use a parametrização $\vec{r} = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ e aplique na expressão para a curvatura.]

Solução. Use a parametrização:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$$

na fórmula da curvatura dada por:

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\|(\vec{i} + f'(t)\vec{j}) \times f''(t)\vec{j}\|}{\|\vec{i} + f'(t)\vec{j}\|^3}$$

e obtenha a expressão dada.

a) $\kappa(x) = 0$

b) $\kappa(x) = 1/a$

c) $\kappa(x) = \frac{12x^2}{(1+16x^6)^{3/2}}$

d) $\kappa(x) = \frac{2|a|}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$

e) $\kappa(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

f) $\kappa(x) = \frac{\sinh(|x|)}{(1+\cosh^2(x))^{3/2}}$

g) $\kappa(x) = \frac{\cos|x|}{(1+\sin^2(x))^{3/2}}$

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 37

Obs.: A curva a) é uma reta, pelo que tem curvatura zero. A curva b) é uma semicircunferência de raio a , pelo que tem curvatura $1/a$. Nos pontos de curvatura zero, o vetor normal não está definido. No item c), $\lim_{x \rightarrow 0^-} \vec{N}(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \vec{N}(t) = \vec{j}$, mas no item g), os limites não são iguais, evidenciando mudança de concavidade.

Para analisar mais rigorosamente a existência do vetor normal, observe que o vetor tangente e normal são dados por:

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \\ &= \frac{\vec{i} + f'(t)\vec{j}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \\ &= \left(1 + f'(t)^2\right)^{-1/2} \vec{i} + f'(t) \left(1 + f'(t)^2\right)^{-1/2} \vec{j} \\ \vec{T}'(t) &= -f'(t)f''(t) \left(1 + f'(t)^2\right)^{-3/2} \vec{i} \\ &\quad + \left[f''(t) \left(1 + f'(t)^2\right)^{-1/2} - f'(t)^2 f''(t) \left(1 + f'(t)^2\right)^{-3/2}\right] \vec{j} \\ &= \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} [-f'(t)\vec{i} + \vec{j}] \\ \vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \\ &= \frac{f''(t)}{|f''(t)|} \frac{-f'(t)\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \\ &= \text{senal}(f''(t)) \frac{-f'(t)\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}\end{aligned}$$

Já o vetor $\vec{B}(t)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} &= \frac{\vec{i} + f'(t)\vec{j}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \times \text{senal}(f''(t)) \frac{-f'(t)\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \\ &= \text{senal}(f''(t)) \frac{(1 + f'(t)^2)\vec{k}}{1 + f'(t)^2} \\ &= \text{senal}(f''(t))\vec{k}\end{aligned}$$

Alternativamente, do fato que $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ e de o vetor $\vec{B}$ ser previsível por inspeção, poderíamos ter evitado os cálculos mais trabalhosos para obter o vetor

$\vec{N}$:

$$\vec{N} = \begin{cases} \vec{k} \times \vec{T}, & f''(t) > 0 \\ -\vec{k} \times \vec{T}, & f''(t) < 0 \\ \text{não definido}, & f''(t) = 0 \end{cases}$$

O vetor $\vec{B}$ também poderia ter sido calculado pela fórmula:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$$

onde

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (\vec{i} + f'(t)\vec{j}) \times f''(t)\vec{j} = f''(t)\vec{k}.$$

◇

ER 2.5.4. Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semi-eixos a e b quando $0 < a < b$. Dica:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2(t)]^{3/2}}$$

e use o fato que $0 \leq \cos^2(t) \leq 1$. Faça o caso $a \leq b$ e $b \leq a$.

- O que acontece quando $a = b$?
- Quais são os semi-eixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre $50m$ e $400m$?
- Encontre os semi-eixos da elipse cuja curvatura máxima é $8m^{-1}$ e o semi-eixo menor é $\frac{1}{4}m$.

Solução. As curvaturas máximas e mínimas são (não necessariamente respectivamente) $\frac{a}{b^2}$ e $\frac{b}{a^2}$. Os raios de curvatura associados são $\frac{b^2}{a}$ e $\frac{a^2}{b}$.

- Quando $a = b$, a elipse é uma circunferência e o raio de curvatura é constante igual a a , que é o raio da circunferência.
- Para calcular os semi-eixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre $50m$ e $400m$, suponha, sem perda de generalidade, que $a < b$ e resolva:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} &= 50 \\ \frac{b^2}{a} &= 400 \end{aligned}$$

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 39

Da primeira equação, temos $b = \frac{a^2}{50}$, o que substituímos na segunda equação para obter:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a^4}{50^2 a} = 400$$

o que significa

$$a^3 = 400 \times 2500 = 1.000.000.$$

Assim $a = 100m$ e $b = \frac{a^2}{50} = 200m$.

c) Sem perda de generalidade, considere $a < b$ e temos as equações:

$$\kappa_{max} = \frac{b}{a^2} = 8$$

Como $a = 1/4$, obtemos: $b = 8a^2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}m$.

◇

ER 2.5.5. Um automóvel se desloca com velocidade constante sobre uma pista cuja forma é uma elipse horizontal de semi-eixos $50m$ e $200m$. Calcule a velocidade do automóvel para que a aceleração normal máxima seja $2m/s^2$.

Obs: Para calcular a curvatura, você provavelmente usou uma parametrização do tipo $\vec{r} = a \sin(t) + b \cos(t)$, explique por que esta parametrização pode ser usada para obter a curvatura, mas não pode ser usada diretamente para calcular a aceleração normal.

Solução. A curvatura máxima da pista é:

$$k_{max} = \frac{200}{50^2} = \frac{2}{25}m^{-1}$$

Sabemos que $a_N = \kappa v^2$, portanto a máxima velocidade possível é:

$$v = \sqrt{\frac{a_N}{\kappa}} = 5m/s$$

Sobre a observação, a parametrização $\vec{r} = a \sin(t) + b \cos(t)$ descreve a elipse, mas não satisfaz a condição de velocidade escalar constante, pelo que pode ser usada para obter a curvatura, mas não representa a cinética do problema. ◇

ER 2.5.6. Considere a trajetória dada por

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin 2t, \quad z(t) = 0.$$

Esboce o gráfico desta trajetória sobre o plano xy . Encontre uma expressão para a curvatura k como uma função da coordenada x na forma

$$\kappa(x) = \frac{|x|(6 - 4x^2)}{(5 - 17x^2 + 16x^4)^{3/2}}.$$

Mostre que a curvatura é zero na origem e apenas na origem. Esboce, agora, o gráfico da curvatura como função de x abaixo do gráfico da curva. Dica: Use identidades trigonométricas como $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ e $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

Solução. A curva é dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - 4\sin(2t)\vec{j}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(2t)} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + 4 - 4\sin^2(2t)} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + 4 - 16\sin^2(t)\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(t) + 4 - 16(1 - \cos^2(t))\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - x^2 + 4 - 16(1 - x^2)x^2} \\ &= \sqrt{5 - 17x^2 + 16x^4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= (4\sin(t)\sin(2t) + 2\cos(t)\cos(2t))\vec{k} \\ &= [8\sin^2(t)\cos(t) + 2\cos(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t))]\vec{k} \\ &= [6\sin^2(t)\cos(t) + 2\cos^3(t)]\vec{k} \\ &= [6(1 - x^2)x + 2x^3]\vec{k} \\ &= [6x - 4x^3]\vec{k}\end{aligned}$$

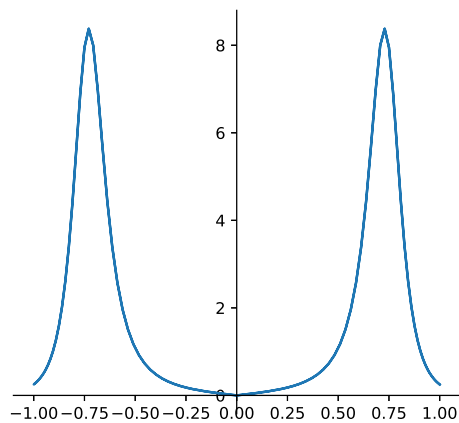
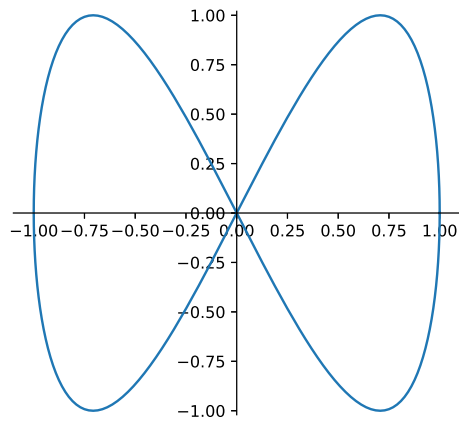
2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 41

Portanto:

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = |6x - 4x^3| = |x|(6 - 4x^2)$$

e

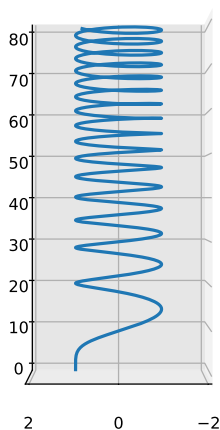
$$\kappa(x) = \frac{|x|(6 - 4x^2)}{(5 - 17x^2 + 16x^4)^{3/2}}.$$



◇

ER 2.5.7. Considere a hélice circular não uniforme dada por

$$\begin{aligned}x &= \cos(t) \\y &= \sin(t) \\z &= f(t) := 8\sqrt{t}.\end{aligned}$$



a) Encontre o passo $P(t)$ (variação da coordenada z) entre os pontos dados por $t_0 = t$ e $t_1 = t + 2\pi$ e mostre que $P(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{8t} + \sqrt{8t+2\pi}}$.

b) Encontre a curvatura desta hélice usando a fórmula dada no Exemplo 2.5.2:

$$\kappa = \frac{\sqrt{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2}}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$

c) Encontre a torção desta curva usando a fórmula dada no Exemplo 2.5.2:

$$\tau = \frac{f'(t) + f'''(t)}{1 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2}$$

d) Interprete os limites do passo, da curvatura e da torção quando $t \rightarrow \infty$.

Solução. O passo é dado por:

$$\begin{aligned}P(t) &= \sqrt{8t + 2\pi} - \sqrt{8t} \\&= (\sqrt{8t + 2\pi} - \sqrt{8t}) \cdot \left(\frac{\sqrt{8t + 2\pi} + \sqrt{8t}}{\sqrt{8t + 2\pi} + \sqrt{8t}} \right) \\&= \frac{2\pi}{\sqrt{8t} + \sqrt{8t + 2\pi}}.\end{aligned}$$

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 43

Primeiro calculamos as derivadas:

$$f(t) = 8t^{1/2}, \quad f'(t) = 4t^{-1/2}, \quad f''(t) = -2t^{-3/2} \quad \text{e} \quad f'''(t) = 6t^{-5/2}.$$

Assim:

$$f'(t)^2 = 16t^{-1} \quad \text{e} \quad f''(t)^2 = 4t^{-3}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 1 + f'(t)^2 + f''(t)^2 &= 1 + 16t^{-1} + 4t^{-3} = t^{-3} (t^3 + 16t^2 + 4) \\ 1 + f'(t)^2 &= 1 + 16t^{-1} = t^{-1} (t + 16) \\ f'(t) + f'''(t) &= 4t^{-1/2} + 6t^{-5/2} = t^{-5/2} (4t^2 + 6) \end{aligned}$$

Obtemos da fórmulas conhecidas:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{t^{-3/2} \sqrt{t^3 + 16t^2 + 4}}{t^{-3/2} (t + 16)^{3/2}} = \frac{\sqrt{t^3 + 16t^2 + 4}}{(t + 16)^{3/2}} \\ \tau(t) &= \frac{t^{-5/2} (4t^2 + 6)}{t^{-3} (t^3 + 16t^2 + 4)} = \frac{t^{1/2} (4t + 6)}{(t^3 + 16t^2 + 4)} \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t) &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) &= 0 \end{aligned}$$

A interpretação intuitiva é que, à medida que o passo da hélice decresce, a curva se aproxima de uma circunferência unitária. A curvatura se aproxima da curvatura dessa circunferência e a torção se aproxima de zero. Dica: Analise o gráfico dessa curva. $\diamond$

Exercícios

E 2.5.1. Calcule a curvatura $\kappa(x)$ e faça um esboço com a respectiva circunferência de curvatura:

a) $y = \frac{1}{x}$, em $x = 1$.

b) $y = \frac{1}{2}x^2$, em $x = -1$.

c) $y = e^x$, em $x = 0$.

E 2.5.2. Calcule o raio de curvatura $\rho(t)$ da elipse $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$. Esboce as circunferências de curvatura nestes pontos.

E 2.5.3. Em que ponto a curva $y = e^x$ tem a máxima curvatura?

E 2.5.4. Considere a hélice dada por

$$\begin{aligned}x &= a \cos(t), \\y &= a \sin(t), \\z &= ct,\end{aligned}$$

onde $a > 0$.

a) Encontre a curvatura desta hélice usando a fórmula

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

b) Encontre a torção desta curva usando a seguinte fórmula para calcular o vetor binormal unitário:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$$

c) Encontre a torção máxima e a torção mínima para um dado a .

E 2.5.5. Considere as funções vetoriais dadas por

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \cos(\pi t)\vec{i} + \sin(\pi t)\vec{j} \\ \vec{g}(t) &= \cos(\pi t^3)\vec{i} + \sin(\pi t^3)\vec{j}\end{aligned}$$

Verifique que ambas parametrizam a mesma curva quando $-1 \leq t \leq 1$. Verifique se as parametrizações são regulares e compare o comportamento da derivada em $t = 0$. Que consequências isso tem para a existência do vetor tangente unitário?

E 2.5.6. Uma motocicleta percorre uma trajetória circular de raio $20m$ com velocidade constante em módulo. A motocicleta poderá derrapar se a aceleração normal exceder $2m/s^2$. Qual é a velocidade máxima do motocicleta para que ela não derrape?

E 2.5.7. Mostre que se a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente, então

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração.

2.5. FÓRMULAS ALTERNATIVAS PARA CURVATURA E TORÇÃO 45

E 2.5.8. Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semi-eixos a e b quando $0 < a < b$. O que acontece quando $a = b$? Quais são os semi-eixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre $50m$ e $400m$?

E 2.5.9. Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de uma partícula em movimento e t o tempo. Encontre $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ e $\|\vec{v}(t)\|$. Faça um esboço da trajetória representando $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ em t_0 .

a) $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

b) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$, $t_0 = 0$.

c) $\vec{r}(t) = \cosh(t)\vec{i} + \sinh(t)\vec{j}$, $t_0 = \ln(2)$.

d) $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

E 2.5.10. A trajetória de uma partícula é representada na forma paramétrica por $x(t) = a\cos(wt)$, $y(t) = b\sin(wt)$.

a) Faça um esboço da trajetória para $a = 2$, $b = 1$ e $w = 1$.

b) Mostre que a aceleração $\vec{a}$ está voltada em direção à origem.

c) Mostre que $\|\vec{a}(t)\|$ é proporcional à distância da partícula à origem.

E 2.5.11. O movimento de uma partícula é descrito por $\vec{r}(t) = (t - t^2)\vec{i} - t^2\vec{j}$. Encontre o valor mínimo para $\|\vec{v}(t)\|$ da partícula e sua localização quando tiver esta velocidade.

E 2.5.12. Encontre o ângulo entre $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ para $\vec{r} = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t = 1$.

E 2.5.13. Onde ao longo da trajetória $\vec{r}(t) = (t^2 - 5t)\vec{i} + (2t + 1)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais?

E 2.5.14. Prove que se o módulo da velocidade de uma partícula é constante, então os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares. (Sugestão: Considere $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$).

E 2.5.15. Prove que se a aceleração normal de uma partícula em movimento é zero para todo t , então a partícula se move ao longo de uma reta. (Sugestão: lembre-se que $\kappa = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3}$).

E 2.5.16. Calcule a componente tangencial a_T e a componente normal a_N da aceleração em $t = t_0$ para:

a) $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

b) $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j}$, $t_0 = 0$.

c) $\vec{r}(t) = (t^3 - 2t)\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j}$, $t_0 = 1$.

d) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t_0 = 1$.

E 2.5.17. Calcule a componente tangencial da aceleração dado $v(t) = \|\vec{v}\| = \sqrt{3t^2 + 4}$, $t = 2$.

E 2.5.18. Dada a aceleração $\vec{a}(t)$ de uma partícula, calcule a velocidade $\vec{v}(t)$ e o vetor posição $\vec{r}(t)$, supondo $t \geq 0$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$ e $\vec{r}(0) = \vec{0}$, para:

a) $\vec{a} = 12\cos(2t)\vec{i} - 8\sin(2t)\vec{j} + 16t\vec{k}$.

b) $\vec{a} = e^{-t}\vec{i} - 6(t+1)\vec{j} + 3\sin(t)\vec{k}$.

E 2.5.19. Uma mosca viaja sobre uma trajetória $\vec{r}(t)$ com velocidade $\vec{v}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Sabendo que a velocidade da abelha no ponto $t = 0$ é $\vec{v}(0) = -\vec{j}$. Calcule $\vec{v}(t)$, $a(t) := \|\vec{a}(t)\|$, $a_N(t)$ e $a_T(t)$. Verifique a identidade $a(t)^2 = a_N(t)^2 + a_T(t)^2$.

Capítulo 3

Superfícies

Neste capítulo, estudaremos funções vetoriais do tipo $\vec{f}(u,v)$, ou seja, uma função que associa um ponto do plano real a vetores no espaço.

3.1 Funções vetoriais de duas variáveis reais - superfícies

Uma função vetorial de duas variáveis é uma função da forma

$$\vec{r}: D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $D_1 \times D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio de definição de $\vec{r}$ e $(u,v) \in D_1 \times D_2$ são os parâmetros ou as coordenadas de superfície. Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

Exemplo 3.1.1. São exemplos de funções vetoriais

a) $\vec{f}(u,v) = \sin(u)\vec{i} + \cos(v)\vec{j} + uv\vec{k}$

b) $\vec{g}(u,v) = \sin(u)\cos(v)\vec{i} + \cosh(u)\sinh(v)\vec{j} + u\vec{k}$

Uma superfície no espaço pode ser representada pelo conjunto de pontos de uma função vetorial $\vec{r}(u,v)$ não constante em todo o seu domínio. A seguinte interpretação ajuda entender essa função: se fixamos v e temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_u(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Da mesma forma, se fixamos u temos que $\vec{r}(u,v)$ descreve uma curva e $\vec{r}_v(u,v)$ é um vetor tangente a essa curva. Se essas curvas não forem paralelas, temos um sistema de coordenadas curvilíneo para escrever todos os pontos da superfície. Pense no globo terrestre, o meridiano

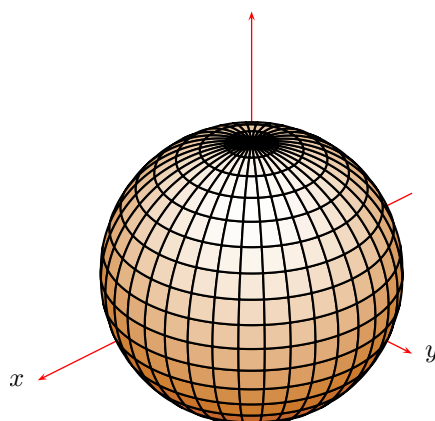


Figura 3.1: Um esfera centrada na origem com meridianos e paralelos traçados.

de Greenwich e a linha do Equador: o globo como uma superfície, Greenwich e Equador como duas curvas e longitude e latitude como um sistema de coordenadas curvilíneo, veja Figura 3.1.2 Observe que esse sistema curvilíneo fica bem definido quando $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ não são paralelos nos pontos do domínio. Chamamos de superfície regular aquela que satisfaz

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}.$$

Exemplo 3.1.2. A função vetorial

$\vec{r} = a \sin(u) \cos(v) \vec{i} + a \sin(u) \sin(v) \vec{j} + a \cos(u) \vec{k}$, $a > 0$, $0 \leq u < \pi$, $0 \leq v < 2\pi$ descreve uma esfera centrada na origem e raio a . De fato, colocando

$$x = a \sin(u) \cos(v), \quad y = a \sin(u) \sin(v) \quad \text{e} \quad z = a \cos(u),$$

temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Além disso, se (x, y, z) é um ponto qualquer nesta esfera, então existem u e v na parametrização. Para tal, basta escolher $u = \cos^{-1} \left(\frac{z}{a} \right)$ e escolher $v \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$\cos(v) = \frac{x}{a \sin(u)} \quad \text{e} \quad \sin(v) = \frac{y}{a \sin(u)}, \quad u \neq 0 \quad \text{e} \quad u \neq \pi.$$

Exemplo 3.1.3. A função vetorial

$$\vec{r} = \cosh(u) \cos(v) \vec{i} + \cosh(u) \sin(v) \vec{j} + \sinh(u) \vec{k}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad u \in \mathcal{R}$$

descreve um hiperbolóide de uma folha. De fato, para cada par (u, v) no domínio, a parametrização

$$x(u, v) = \cosh(u) \cos(v), \quad y(u, v) = \cosh(u) \sin(v) \quad \text{e} \quad z(u, v) = \sinh(u)$$

nos leva na equação canônica de um hiperbolóide de uma folha:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \cosh^2(u) \cos^2(v) + \cosh^2(u) \sin^2(v) - \sinh^2(u) \\ &= \cosh^2(u) (\cos^2(v) + \sin^2(v)) - \sinh^2(u) \\ &= \cosh^2(u) - \sinh^2(u) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se (x, y, z) é um ponto sobre o hiperbolóide, definimos $u = \cosh^{-1}(z)$ e escolhemos $v \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$\cos(v) = \frac{x}{\cosh(u)} \quad \text{e} \quad \sin(v) = \frac{y}{\cosh(u)}.$$

Exercícios

E 3.1.1. Mostre que a função vetorial

$$\vec{r}(u, v) = (u + v)\vec{i} + (u - v)\vec{j} + (3u - 2v + 1)\vec{k}, \quad 0 \leq u, v \leq \infty,$$

descreve um plano.

E 3.1.2. Mostre que a função vetorial

$$\vec{r}(u, v) = 3 \cos(u)\vec{i} + 3 \sin(u)\vec{j} + v\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2$$

descreve um cilindro.

3.2 Vetor unitário normal e orientação

Para os fins de teoria de integração sobre superfícies, que discutiremos mais adiante, é fundamental definir o vetor unitário normal. Dado uma superfície e um ponto nela, dizemos que um vetor é normal à superfície se ele é perpendicular no ponto a cada curva contida na superfícies. Em especial, um vetor normal à superfícies no ponto $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ e $z_0 = z(u_0, v_0)$, deve ser perpendicular às curvas $\vec{r}(u_0, v)$ e $\vec{r}(u, v_0)$, isto é, as curvas geradas quando se fixa um dos parâmetros u_0 ou v_0 , respectivamente. Assim, podemos concluir que cada vetor normal está da mesma direção do produto vetorial $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Finalmente, o vetor normal unitário deve ter norma unitária, portanto, deve ser da forma:

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}. \quad (3.1)$$

Observe que se a superfície for regular, então $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, o que indica que a expressão (3.1) está bem definida. Aqui, o sinal indica para qual lado o vetor normal aponta e define a orientação da superfície.

Exemplo 3.2.1. Vamos calcular o vetor normal à esfera

$$\vec{r} = a \sin(u) \cos(v) \vec{i} + a \sin(u) \sin(v) \vec{j} + a \cos(u) \vec{k}, \quad a > 0, \quad 0 \leq u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

Calculamos as derivadas

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= a \cos(u) \cos(v) \vec{i} + a \cos(u) \sin(v) \vec{j} - a \sin(u) \vec{k}, \\ \vec{r}_v &= -a \sin(u) \sin(v) \vec{i} + a \sin(u) \cos(v) \vec{j}, \end{aligned}$$

o produto vetorial

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos(u) \cos(v) & a \cos(u) \sin(v) & -a \sin(u) \\ -a \sin(u) \sin(v) & a \sin(u) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin^2(u) \cos(v) \vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v) \vec{j} \\ &\quad + (a^2 \sin(u) \cos(u) \cos^2(v) + a^2 \sin(u) \cos(u) \sin^2(v)) \vec{k} \\ &= a^2 \sin^2(u) \cos(v) \vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v) \vec{j} + a^2 \sin(u) \cos(u) \vec{k} \end{aligned}$$

e a norma do produto vetorial

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= a^2 \sqrt{\sin^4(u) \cos^2(v) + \sin^4(u) \sin^2(v) + \sin^2(u) \cos^2(u)} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^4(u) + \sin^2(u) \cos^2(u)} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^2(u)} \\ &= a^2 \sin(u), \end{aligned}$$

visto que $0 \leq u < \pi$. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \\ &= \pm \frac{a^2 \sin^2(u) \cos(v) \vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v) \vec{j} + a^2 \sin(u) \cos(u) \vec{k}}{a^2 \sin(u)} \\ &= \pm (\sin(u) \cos(v) \vec{i} + \sin(u) \sin(v) \vec{j} + \cos(u) \vec{k}). \end{aligned}$$

Observe que em $u = v = 0$, temos $\vec{r} = a\vec{k}$ e $\vec{n} = \pm\vec{k}$. Portanto, o sinal positivo orienta a superfície para fora e o sinal negativo orienta a superfície para dentro.

Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Calcule o vetor normal unitário à superfície cônica $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $(1,0,0)$, sabendo que a orientação positiva tem componente $\vec{k}$ negativa.

Solução. Considere a parametrização para o cone $\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\vec{k}$. Calculamos

$$\begin{aligned}\vec{r}_x &= \vec{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}, \\ \vec{r}_y &= \vec{j} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}.\end{aligned}$$

No ponto $(1,0)$, temos:

$$\begin{aligned}\vec{r}_x &= \vec{i} - \vec{k}, \\ \vec{r}_y &= \vec{j},\end{aligned}$$

O produto vetorial é dado por

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \vec{i} + \vec{k}$$

e a norma do produto vetorial

$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \pm \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|} \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{k}).\end{aligned}$$

Como a orientação positiva da superfície tem componente $\vec{k}$ negativa, o vetor normal é

$$\vec{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{k}).$$

◇

Exercícios

E 3.2.1. Calcule o vetor normal unitário ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1,1,2)$, sabendo que a orientação positiva tem componente $\vec{k}$ positiva.

3.3 Caso particular em que a superfície é o gráfico de uma função

O caso particular da superfície representada por uma função $z = f(x, y)$, podemos assumir uma parametrização natural $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u, v)\vec{k}$. Analogamente para os casos $y = f(x, z)$ ou $x = f(y, z)$, podemos assumir, respectivamente, as parametrizações $\vec{r} = u\vec{i} + f(u, v)\vec{j} + v\vec{k}$ ou $\vec{r} = f(u, v)\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k}$. Para o caso $z = f(x, y)$ (analogamente para os demais), a condição $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ assume a forma

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{vmatrix} \\ &= -f_u\vec{i} - f_v\vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$

Isso implica que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, ou seja, a superfície é regular. Voltaremos a discutir esse assunto nos próximos capítulos, quando o vetor gradiente estiver definido.

Exemplo 3.3.1. Os planos são definidos por equações da forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde pelo menos uma das constante a , b ou c não é zero. Supondo $c \neq 0$, basta escrever $z = f(x, y) = \frac{-ax-by-d}{c}$ e definimos o plano como o gráfico da função f .

Exemplo 3.3.2. A figura 3.2 apresenta uma lista das principais quádras estudadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com funções de várias variáveis. As equações são as seguintes:

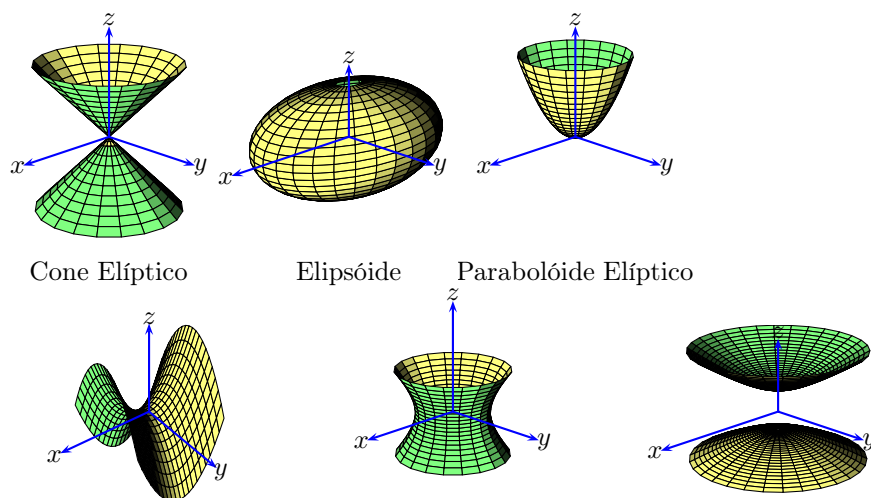
a) Cone elíptico: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

b) Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

c) Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

d) Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

e) Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



Parabolóide Hiperbólico Hiperbolóide de uma folha Hiperbolóide de duas folhas

Figura 3.2: Quádricas

f) Hiperbolóide de duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Algumas das superfícies quádricas são gráficos de funções, como é o caso dos parabolóides e outras não são, como é o caso cone elíptico. Mesmo assim, podemos definir a quádrica como a união do gráfico de duas funções. Por exemplo, o cone elíptico pode ser escrito como a união dos gráficos das funções $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ e $z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.

Exemplo 3.3.3. A superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$, pode ser escrita como a união dos gráficos das funções $x = \sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$ e $x = -\sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.

Exercícios

E 3.3.1. Esboce o gráfico da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

E 3.3.2. Esboce o gráfico da superfície $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

E 3.3.3. Esboce o gráfico da superfície $y^2 + z^2 = 4$, $0 \leq x \leq 3$.

E 3.3.4. Esboce o gráfico da superfície $x + y + z = 1$, no primeiro octante.

Capítulo 4

Campos vetoriais

4.1 Campos escalares e campos vetoriais

Campo é termo usado para designar funções definidas em uma porção do espaço tridimensional (ou bidimensional), isto é, funções cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$). Trabalharemos com dois tipos de campos: os campos escalares e os campos vetoriais. Os campos vetoriais são funções cuja imagem é composta de vetores no $\mathbb{R}^3$, já a imagem dos campos escalares são números reais, isto é, escalares.

Exemplo 4.1.1. São exemplos de campos escalares.

- a) A função que liga a posição de um ponto dentro de uma sala à temperatura neste ponto.
- b) A pressão do ar como função da posição na atmosfera.
- c) $f(x,y,z) = 100 + 20e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- d) $f(x,y,z) = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

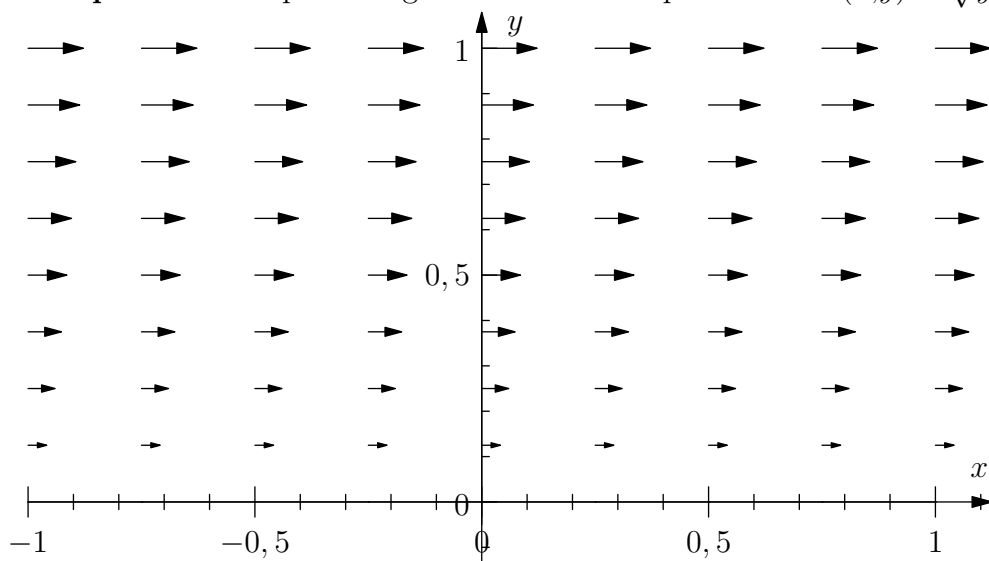
Exemplo 4.1.2. São exemplos de campos vetoriais.

- a) A função que liga a posição de um ponto dentro de um fluido à velocidade (vetor) neste ponto.
- b) O campo magnéticos, elétrico, gravitacional etc.
- c) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$.
- d) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{r} \times \vec{k}$

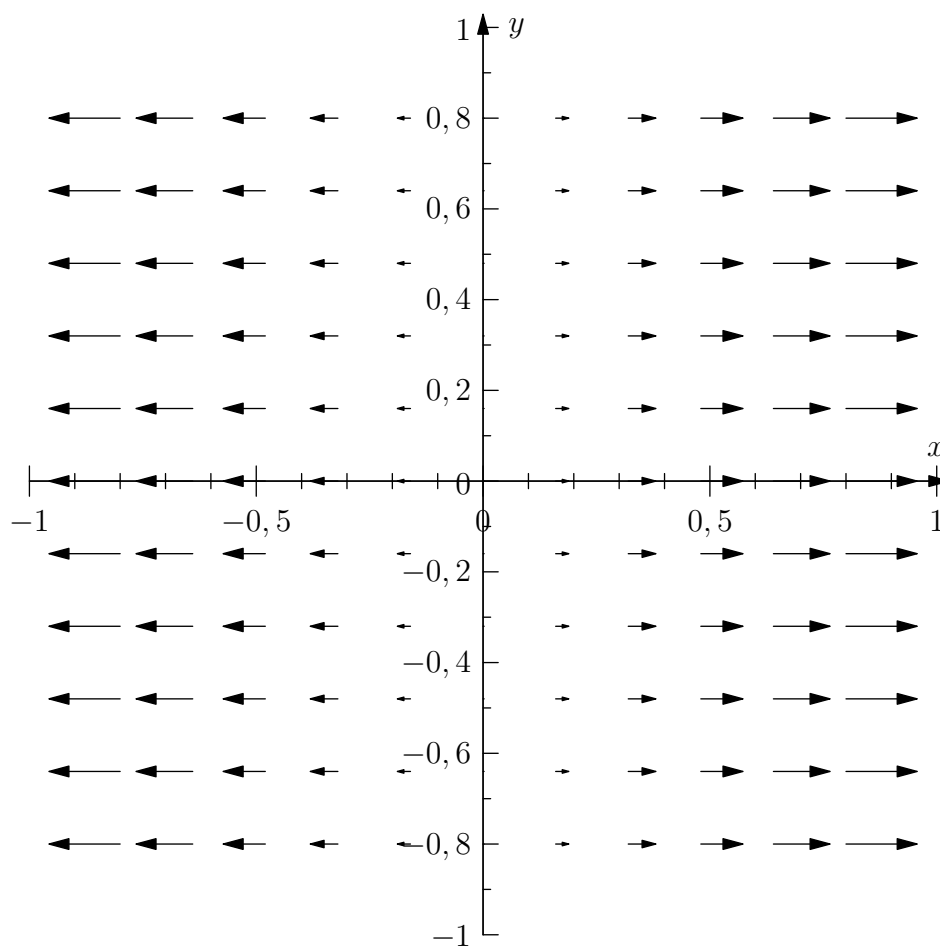
4.2 Representação gráfica dos campos vetoriais

Um campo vetorial é representado graficamente por um conjunto de setas partindo de pontos (x,y,z) e de comprimento proporcional ao módulo de $\vec{F}(x,y,z)$ e mesma direção e sentido de $\vec{F}(x,y,z)$. O conjunto de pontos é escolhido de forma arbitrária de forma a permitir interpretar o campo.

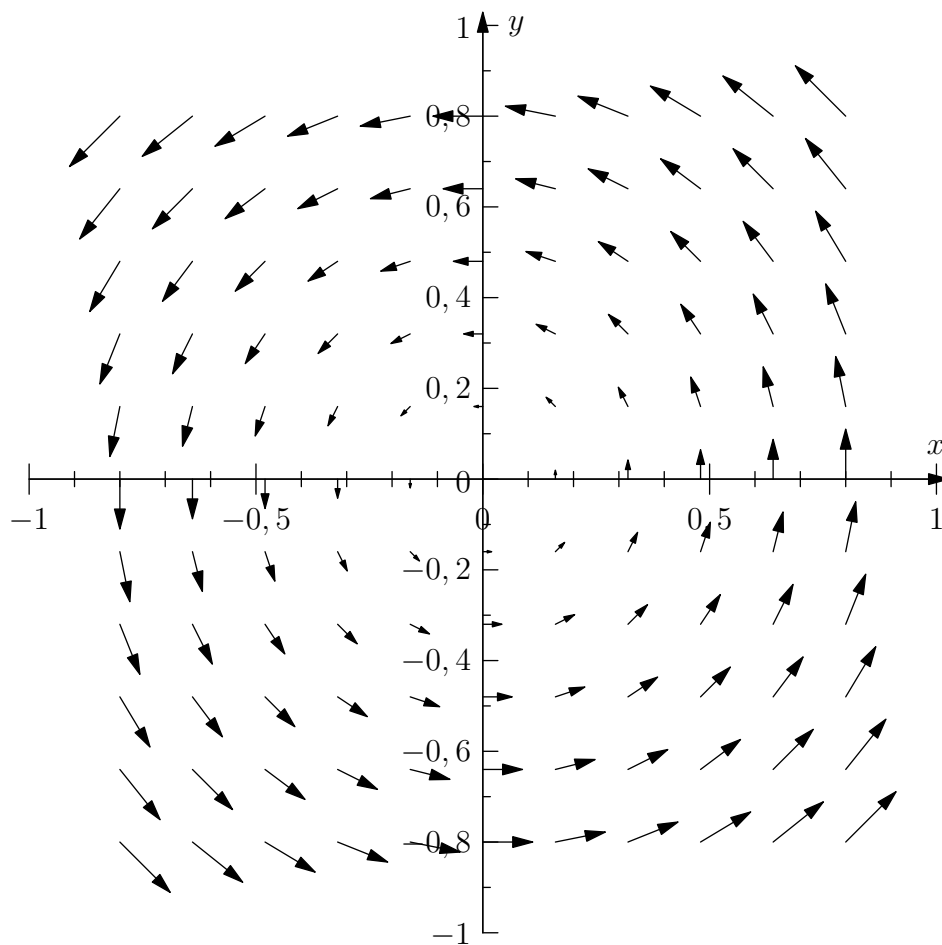
Exemplo 4.2.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\vec{i}$, $y \geq 0$.



Exemplo 4.2.2. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = x\vec{i}$, $y \geq 0$.



Exemplo 4.2.3. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



Exercícios

E 4.2.1. Faça um esboço dos campos vetoriais $\vec{F}$. Procure representar os vetores com as respectivas proporções:

a) $\vec{F}(x,y) = 2\vec{i} - \vec{j}$.

b) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$;

c) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x\vec{i} + y\vec{j})$;

4.3 Cálculo com o operador nabla

4.3.1 Definição matemática de divergente, gradiente e rotacional

No cálculo vetorial, o operador $\vec{\nabla}$, pronunciado nabla ou del, é um símbolo usado para denotar uma série de operadores diferenciais definidos em campos escalares e vetoriais, como gradiente, divergente e rotacional. Ele é definido simbolicamente como:

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1)$$

Rigorosamente falando, o operador del não é um operador diferencial, mas um mnemônico que ajuda a lembrar de uma série de operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{Gradiente}), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (\text{Divergente}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (\text{Rotacional}). \end{aligned}$$

O rotacional pode ser representado pelo seguinte determinante simbólico, que funciona como um mnemônico para lembrar facilmente de sua definição:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 4.3.1. Calcule o gradiente do campo escalar dado por $f(x,y,z) = xy + z$.

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k} \quad (4.2)$$

Exemplo 4.3.2. Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial dado por $\vec{F} = (yz + x)\vec{i} + z^2\vec{j} + z^3\vec{k}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 3z^2 = 3z^2 + 1 \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz+x & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$= (0-2z)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (0-z)\vec{k} \quad (4.5)$$

$$= -2z\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}. \quad (4.6)$$

Exemplo 4.3.3. Dado o campo vetorial dado por $\vec{F} = x^5\vec{i} + y^2\vec{j}$, calcule o gradiente do divergente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, de $\vec{F}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 5x^4 + 2y \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 20x^3\vec{i} + 2\vec{j} \quad (4.8)$$

4.3.2 Operadores diferenciais de segunda ordem

Operadores diferenciais de segunda ordem podem ser definidos através da composição de operadores diferenciais de primeira ordem. Combinando o gradiente, rotacional e divergente, encontramos as seguintes possibilidades:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \quad (\text{Divergente do gradiente ou laplaciano}) \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \quad (\text{Rotacional do gradiente}) \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (\text{Gradiente do divergente}) \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (\text{Divergente do rotacional}) \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (\text{Rotacional do rotacional}) \quad (4.13)$$

No caso do Laplaciano, temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

O Laplaciano também pode ser denotado por $\vec{\nabla}^2 f$ ou por Δf , ou seja, $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$.

O Laplaciano também pode ser definido para um campo vetorial $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{F} &= (\vec{\nabla}^2 F_1)\vec{i} + (\vec{\nabla}^2 F_2)\vec{j} + (\vec{\nabla}^2 F_3)\vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right) \vec{k} \\ &= \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Assim como estabelecemos uma expressão para o Laplaciano, podemos escrever todas as expressões dos operadores de segunda ordem usando as definições de gradiente, divergente e rotacional. Por exemplo, se $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$, temos a seguinte expressão para o gradiente do divergente:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \vec{\nabla} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial yx} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial zx} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial xy} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial zy} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial xz} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial yz} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

As demais expressões ficam de exercício para o leitor.

4.3.3 Identidades envolvendo o operador nabla

Nesta seção, discutimos algumas identidades envolvendo o operador $\vec{\nabla}$. Sejam $f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ campos escalares e $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ campos vetoriais. Então, valem as identidades da tabela 4.1.

As demonstrações dos itens 1, 2 e 3 da tabela 4.1 vem diretamente da linearidade das derivadas parciais. De fato, no caso do item 1,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f + g) &= \frac{\partial(f + g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(f + g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(f + g)}{\partial z} \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \\ &= \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g.\end{aligned}$$

Tabela 4.1: Tabela do operador $\vec{\nabla}$

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $-(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

As demonstrações dos itens 2 e 3 são análogas ao do item 1. Os itens 4, 5 e 6 da tabela 4.1 são demonstrados a partir da propriedade da derivadas parciais do produto de duas funções. No caso do item 4,

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}(fg) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\vec{k} \\
 &= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k} \\
 &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \\
 &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f
 \end{aligned}$$

O item 7 está demonstrado na expressão 4.14. Os itens 8 e 9 podem ser provados por simples inspeção, desde que assumimos que as funções envolvidas possuem a segunda derivada contínua:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) \\
 &\quad + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right) \\
 &\quad + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)
 \end{aligned}$$

Sob a regularidade exigida, as derivadas parciais podem ser comutadas e cada termo do rotacional é nulo, isto é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv 0 \quad (4.15)$$

A demonstração é análoga para o item 9 da tabela.

Para o item 10 da tabela, supondo $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$, observemos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (4.16)$$

Os termos à direita do item 10 são:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \quad (4.17)$$

e

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{F} = -\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}. \quad (4.18)$$

Vamos calcular apenas a componente $\vec{i}$ de cada um dos três termos imediatamente acima. A componente $\vec{i}$ da expressão (4.16) é

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \quad (4.19)$$

a componente $\vec{i}$ da expressão (4.17) é

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial yx} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial zx} \quad (4.20)$$

e a componente $\vec{i}$ do operador (4.18) é

$$-\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}. \quad (4.21)$$

Agora, fica fácil ver que a soma das expressões (4.21) e (4.20) resulta na expressão (4.19). Analogamente, podemos demonstrar a igualdade das outras duas componentes para concluir a validade do item 10 da tabela. As demonstrações dos itens 11, 12 e 13, embora um pouco mais longas, são análogas a do item 10, e ficam como exercício. O demonstração do item 14 será feita na seção 4.8

Exercícios resolvidos

ER 4.3.1. Mostre que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g) = 0$

Solução.

$$\begin{aligned} E &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g) \\ &= \vec{\nabla} g \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f) + \vec{\nabla} f \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} g) \quad \text{tab(11) com } \vec{F} = \nabla f \text{ e } \vec{G} = \nabla g. \\ &= 0 \quad \text{tab(8)} \end{aligned}$$

◇

ER 4.3.2. Simplifique $\vec{\nabla} \times (\vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F}] + \vec{F} \times \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ e mostre que esta expressão equivale a $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(\vec{\nabla} \times \vec{F})$

Solução.

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (\vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F}] + \vec{F} \times \vec{\nabla}^2 \vec{F} \\
 &= \vec{\nabla} \times (\vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla}^2 \vec{F}] \\
 &= \vec{\nabla} \times (\vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \quad \text{tab(10)} \\
 &= [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \times \vec{F} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(\vec{\nabla} \times \vec{F})] + \vec{F} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}), \quad \text{tab(6) com } f = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \\
 &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(\vec{\nabla} \times \vec{F})
 \end{aligned}$$

Onde se usou que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

◇

ER 4.3.3. Verifique $\text{tab}(10)$, isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ para

$$\vec{F} = x^2 y \vec{i} + xyz \vec{j} + z^2 y \vec{k}.$$

Solução.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & xyz & z^2 y \end{vmatrix} \\
 &= (z^2 - xy) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + (yz - x^2) \vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z^2 - xy) & 0 & (yz - x^2) \end{vmatrix} \\
 &= (z - 0) \vec{i} + (2z + 2x) \vec{j} + (0 + x) \vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) &= \vec{\nabla}(2xy + xz + 2yz) \\
 &= (2y + z) \vec{i} + (2x + 2z) \vec{j} + (x + 2y) \vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F} = 2y\vec{i} + 0\vec{j} + 2y\vec{k}$$

Vemos que a identidade se verifica.

◇

Exercícios

E 4.3.1. Calcule o divergente e o rotacional do campo $\vec{F}$ para

a) $\vec{F} = x^2\vec{i} - 2\vec{j} + yz\vec{k}$

b) $\vec{F} = e^{xy}\vec{i} - \cos(y)\vec{j} + \sin^2(z)\vec{k}$

E 4.3.2. Mostre que se $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, onde a , b e c são constantes, e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então:

a) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{r}) = 0$.

b) $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{r}) = 2\vec{u}$.

E 4.3.3. Dado $f = 2xz^4 - x^2y$, calcule $\vec{\nabla} f$ e $\|\vec{\nabla} f\|$ no ponto $P(2, -2, 1)$.

E 4.3.4. Mostre que $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{F}$, onde $\vec{F} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$.

E 4.3.5. Mostre que

$$\vec{\nabla}^2(fg) = f\vec{\nabla}^2g + 2\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}^2f.$$

E 4.3.6. Use a tabela do operador del para mostrar que:

a) $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{F}) - \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$.

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$.

4.4 Derivada direcional e gradiente

Imagine um campo escalar $f(x, y, z)$, isto é, uma função que atribui um valor numérico a cada ponto (x, y, z) numa região do espaço.

A derivada direcional de $f(x, y, z)$ mede a taxa de variação de f na direção específica apontada por um dado vetor $\mathbf{v}$ a partir do ponto (x_0, y_0, z_0) .

Tomemos, como exemplo, a temperatura $T(x, y, z)$ como função da posição (x, y, z) . A derivada direcional nesse caso será a taxa de variação da temperatura com deslocamento em dada direção e será medida em unidades de temperatura por unidade de comprimento. Observe que a taxa de variação da temperatura num dado ponto pode ser diferente na direção norte e na direção oeste.

Matematicamente, a derivada direcional $D_{\vec{v}}f(x, y, z)$ é definida da seguinte forma:

$$D_{\vec{v}}f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) - f(x, y, z)}{h}$$

Aqui, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é um vetor unitário que define a direção em que estamos calculando a derivada direcional, e h é um pequeno incremento.

A derivada direcional, assim definida, é um limite do tipo 0/0 e pode ser calculada usando a regra de L'Hôpital, isto é, derivando o numerador e o denominador em h , na variável do limite:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dh}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z)}{1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dh}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) \right] \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) &= \frac{\partial}{\partial x}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z)v_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z)v_y \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z)v_z. \end{aligned}$$

Agora tomamos o limite $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(x, y, z) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} f(x + hv_x, y + hv_y, z + hv_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) v_x + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) v_y + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) v_z \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \vec{k} \right) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \\
&= \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

ER 4.4.1. A temperatura de um ponto $P(x, y)$ de uma placa metálica é:

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

Encontre a taxa de variação da temperatura em $(1, 1)$ na direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Solução. Primeiro normalizamos o vetor $\vec{a}$ para obter o versor com sua direção e sentido:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{i} - \vec{j}).
\end{aligned}$$

Agora calculamos o gradiente da função dada:

$$\vec{\nabla} T(x, y) = \frac{y(1 - x^2 + y^2)\vec{i} + x(1 + x^2 - y^2)\vec{j}}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Substituímos no ponto $x = y = 1$:

$$\vec{\nabla} T(1, 1) = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{9}.$$

A derivada direcional é dada por:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T(1, 1) = \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{45}$$

◇

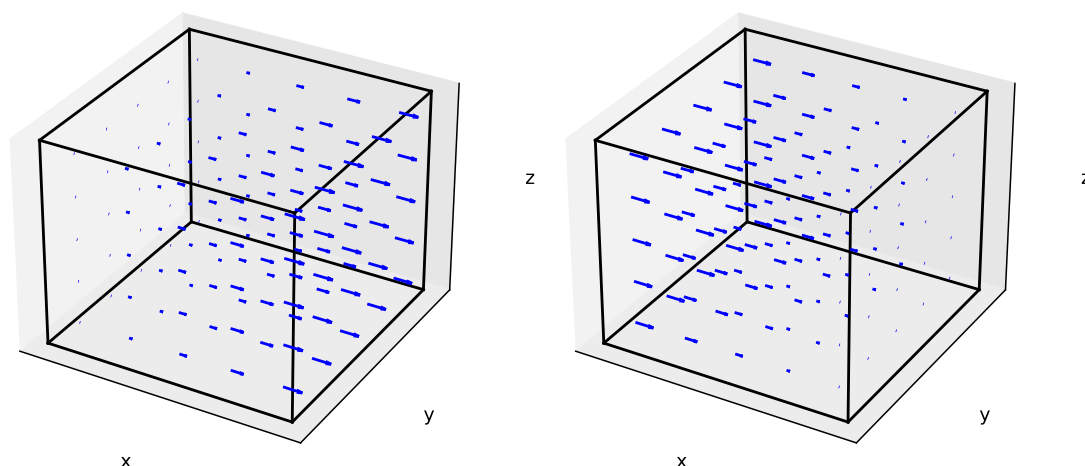
4.5 Divergente e equação da continuidade

É importante construir uma interpretação intuitiva do conceito de divergente de um campo vetorial.

Em termos físicos, a divergência de um campo vetorial é a medida do quanto esse campo se comporta como uma fonte (criador de linhas de campo) em um determinado ponto. É uma medida local do quanto há mais vetores saindo de uma região infinitesimal do espaço do que entrando nela.

Um ponto em que há criação de linhas de campo tem divergência positiva e é frequentemente chamado de **fonte**. Um ponto em que o fluxo é dirigido para dentro tem divergência negativa e é frequentemente chamado de **sumidouro** do campo.

Se imaginamos um pequeno cubo em torno de um ponto, o divergente é positivo quanto há mais linhas de campo saindo do que entrando. Analogamente, o divergente é negativo quanto há mais linhas de campo entrando do que saindo. Veja os gráficos abaixo de campos da forma $\vec{F} = f(x)\vec{i}$, isto é, apontam na direção x e só dependem da coordenada x :



No gráfico à esquerda, o campo é nulo na face esquerda, mas atravessa a face direita no sentido para fora. Já no gráfico à direita, o campo está entrando pela face à esquerda, mas é nulo na face à direita. Em ambos os casos, o campo é paralelo às outras quatro faces, pelo que não as atravessa.

Observe que o fenômeno é devido à expansão ou à compressão das linhas no sentido x . Vale observar que para um campo da forma $\vec{F} = f(x)\vec{i}$, o divergente é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} := \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 = \frac{\partial}{\partial x} F_1.$$

Podemos generalizar esse raciocínio assumindo um campo constante em cada

face, isto é:

$$\vec{F} = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j} + h(z)\vec{k}$$

Somando as contribuições de cada componentes, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} := \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3$$

Que é justamente a expressão do divergente.

Para um campo mais geral cujas três componentes dependem das três variáveis, considera-se que para um cubo muito pequeno (tão pequeno quanto se queira), as componente podem ser consideradas constantes em cada face.

4.5.1 Equação da continuidade

Pode-se ilustrar a divergência de um campo vetorial usando o exemplo de um campo de velocidade de um fluido, cujo movimento pode ser representado por um campo vetorial $\vec{v}(x, y, z)$ enquanto sua densidade é um campo escalar $\rho(x, y, z)$.

Admitimos que o fluido seja compressível, isto é, pode se tornar mais rarefeito em algumas regiões de espaço e mais comprimido noutras.

Nosso objetivo é consolidar o significado do operador divergente através de um raciocínio no estudo do escoamento de um fluido. Para isso, chegaremos numa importante equação conhecida como "equação da continuidade", que expressa outra lei fundamental da Física - a conservação da massa.

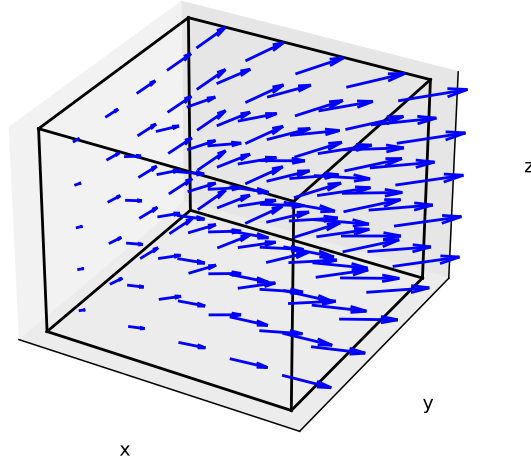
Denotamos a densidade de corrente o campo vetorial dado pelo produto da velocidade com a densidade:

$$\vec{J}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\vec{v}(x, y, z).$$

Observe que essa grandeza tem unidade $Kg/m^2/s$ no S.I., isto é, quilograma por metro quadrado por segundo e mede quanta massa atravessa uma superfície por unidade de medida da área da superfície num intervalo de tempo.

Vamos considerar o movimento de um fluido em uma região do espaço em que, por hipótese, não há fontes nem sumidouros. Por "fontes", estamos nos referindo a regiões onde há emissão ou criação de partículas, enquanto por "sumidouros", nos referimos a regiões onde há absorção ou destruição de partículas.

Agora, vamos imaginar o escoamento desse fluido através de um pequeno cubo de lado ℓ e volume $V := \ell^3$, em um sistema de coordenadas retangulares e cujas faces são paralelas aos planos coordenados, conforme ilustrado a seguir:



Vamos calcular a vazão através deste volume elementar, ou seja, a quantidade de massa que entra menos a quantidade de massa que sai dele por unidade de tempo. Para realizar esse cálculo, analisaremos cada par de faces opostas da caixa, compondo a vazão de três partes distintas: a vazão através das faces frontal e posterior, a vazão através das faces superior e inferior e a vazão através das faces laterais. Todas as faces têm área ℓ^2 .

A variação da massa total, m dentro do cubo é dada pela vazão total que atravessa as seis faces do cubo. Posicionado cubo com um vértice em (x, y, z) e seu vértice oposto em $(x + \ell, y + \ell, z + \ell)$.

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &= \ell^2 [J_1(x, y, z) - J_1(x + \ell, y, z)] \\ &+ \ell^2 [J_2(x, y, z) - J_2(x, y + \ell, z)] \\ &+ \ell^2 [J_3(x, y, z) - J_3(x, y, z + \ell)] \end{aligned}$$

Expressamos, agora, a massa $m(t)$ como o produto da densidade média dentro do cubo pelo volume $\bar{\rho}\ell^3$ e dividimos ambos os lados da igualdade por ℓ^3 :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\rho}}{dt} &= \left[\frac{J_1(x, y, z) - J_1(x + \ell, y, z)}{\ell} \right] \\ &+ \left[\frac{J_2(x, y, z) - J_2(x, y + \ell, z)}{\ell} \right] \\ &+ \left[\frac{J_3(x, y, z) - J_3(x, y, z + \ell)}{\ell} \right] \end{aligned}$$

Agora, aplicamos o limite $\ell \rightarrow 0+$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(x,y,z,t)}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}J_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}J_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}J_3(x,y,z)\right) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}\end{aligned}$$

Esta equação é chamada equação da continuidade e expressa a lei de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho(x,y,z,t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho(x,y,z)\vec{v}(x,y,z))$$

Exercícios

E 4.5.1. Use a equação da continuidade para mostrar que um fluido incompressível e em estado estacionário o campo de velocidade $\vec{v}$ é tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

E 4.5.2. O escoamento de um fluido incompressível e estacionário é regido pelo campo vetorial $\vec{v}$. Verifique, em cada caso, se há fontes ou sumidouros em alguma região do espaço:

a) $\vec{v} = (x+y)\vec{i} - xz^3\vec{j} + x^2\sin(y)\vec{k}$.

b) $\vec{v} = xy\vec{i} - xy\vec{j} + y^2\vec{k}$.

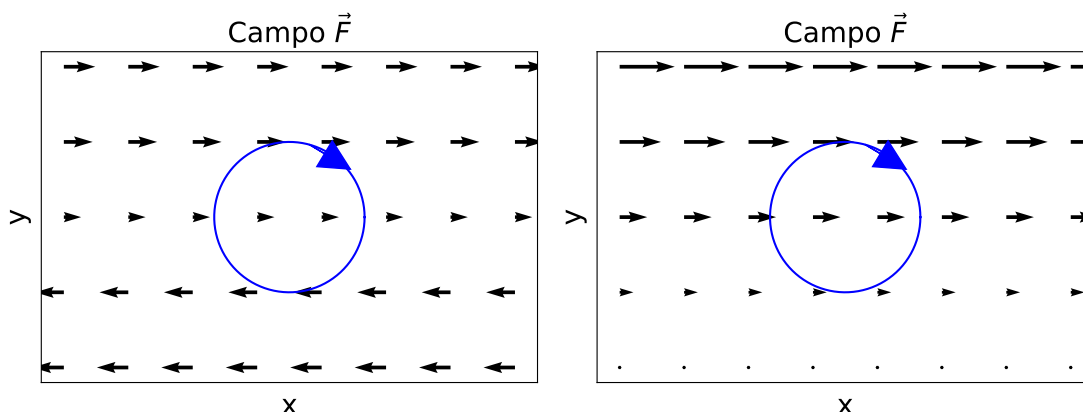
c) $\vec{v} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

4.6 Interpretação do rotacional

O operador rotacional nos permite avaliar a tendência do campo vetorial em girar ou formar vórtices ao redor de um ponto, indicando se há rotação local em torno desse ponto. Ele descreve a direção e intensidade da rotação do campo original. Ou seja, o rotacional de um campo vetorial é um novo campo vetorial.

Para entender esse conceito abstrato de vorticidade, ou de capacidade de giro, imaginamos uma pequena bolinha imersa dentro de um fluido (na situação idealizada a bolinha não interfere no fluxo, inclusive dentro do volume da bolinha). O centro de massa da bolinha está fixo e lhe é permitido apenas girar em torno dele.

As linhas de força paralelas às superfícies do fluido são as responsáveis por fazer a bolinha girar pelo atrito. Veja ilustração abaixo:



Observe que ambos os campos têm vorticidade tal que a bolinha gira no sentido anti-horário, isto é, com spin $-\vec{k}$. Esse giro é devido à variação da componente $F_1(x,y,z)$ no sentido perpendicular y :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

É esperado, portanto, definir o rotacional como a soma de todas as possíveis derivadas dessa forma e obedecendo a regra da mão direita:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Exercícios

E 4.6.1. Supondo que um fluido gira como um corpo rígido com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}$, mostre que $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$.

E 4.6.2. Em cada caso é dada a velocidade $\vec{v}$ do movimento estacionário de um fluido. Encontre o $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ e diga se o campo $\vec{v}$ é um campo irrotacional ou um campo de vórtice.

- a) $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$.
- b) $\vec{v} = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$.
- c) $\vec{v} = y^2\vec{i}$.

4.7 Campos conservativos

Definição 4.7.1. Um campo $\vec{F}(x,y,z)$ é dito conservativo se existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$ tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi$$

Neste caso φ é chamado de campo potencial de

$$\vec{F}(x,y,z)$$

Observação 4.7.1. Campos conservativos também são conhecidos como campos gradientes ou campos irrotacionais, este último nome advém do fato que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}.$$

Esta identidade é oriunda da Tabela 4.1, item 8.

Exemplo 4.7.1. O campo $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ é conservativo por $\vec{F} = \vec{\nabla}(x^2y)$.

Exercícios resolvidos

ER 4.7.1. Dado o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = 2xy^3 + (1 + 3x^2y^2)\vec{j}$, encontre uma função potencial $\varphi(x,y,z)$.

Solução. A função potencial φ deve satisfazer $\vec{\nabla}\varphi = \vec{F}$, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2xy^3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 1 + x^2y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Da primeira equação, temos $\varphi(x,y,z) = x^2y^3 + C(y,z)$. Diferenciando esta expressão substituindo na segunda condição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 + C(y,z)) = 1 + x^2y^2.$$

Isso implica $C_y(y,z) = 1$, isto é, $C(y,z) = y + D(z)$. Da última expressão vemos que $D'(z) = 0$ e portanto:

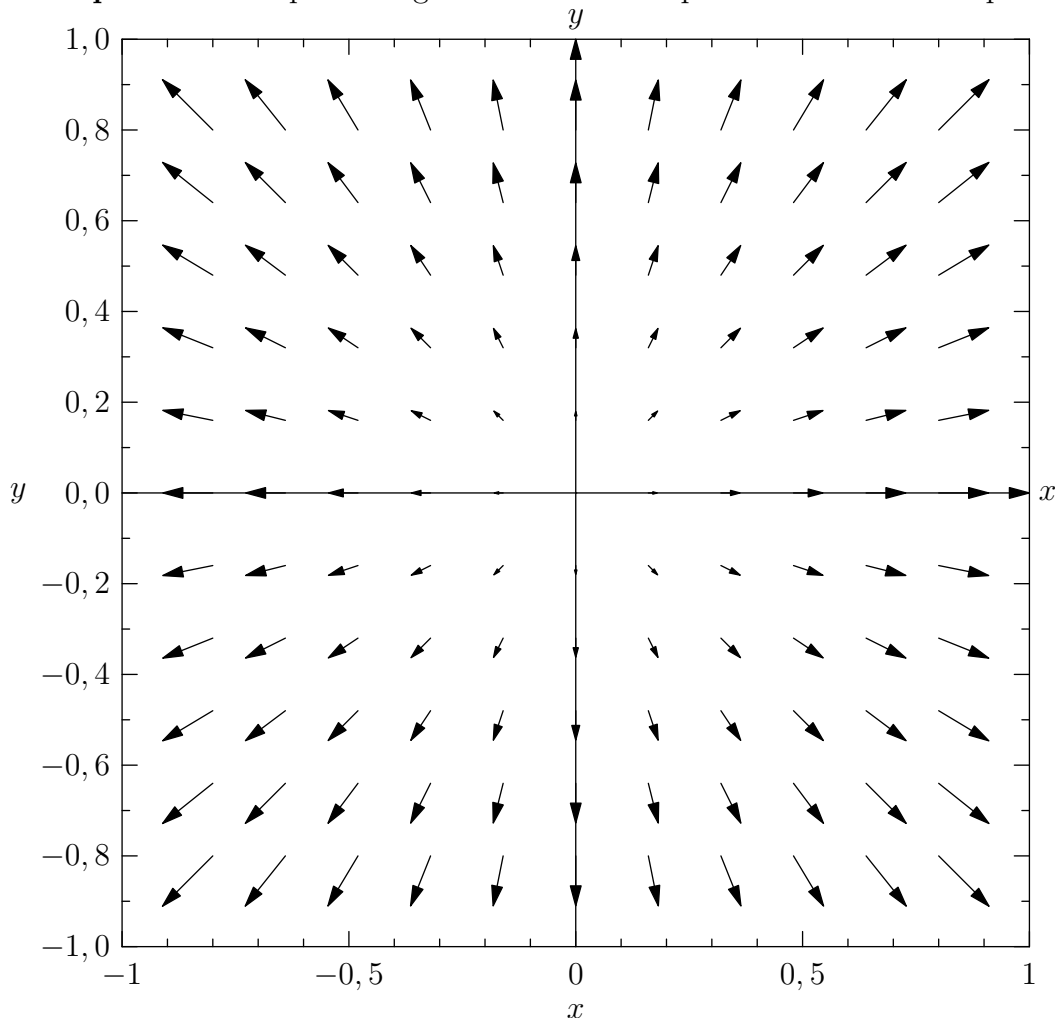
$$\varphi(x,y,z) = x^2y^3 + y + E.$$

◇

4.8 Campos radiais e potenciais centrais

Campos radiais vetoriais são campos da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, isto é campos vetoriais cujo módulo depende apenas da distância até a origem, isto é, de $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e cuja direção é sempre paralela ao vetor posição, $\vec{r}$.

Exemplo 4.8.1. Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F} = \vec{r}$ no plano xy .



Exercícios

E 4.8.1. Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$, $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ e $\vec{\nabla} r = \frac{1}{r}\vec{r} = \hat{r}$, sendo $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

E 4.8.2. Dada a função escalar $f(r)$, onde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, use a regra da cadeia para mostrar que

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r} = f'(r) \hat{r}.$$

Aplique essa fórmula para mostrar que $\vec{\nabla} r^n = nr^{n-2} \vec{r}$.

E 4.8.3. Use os resultados do exercício 4.8.2 para calcular $\vec{\nabla} f(r)$ para

- a) $f(r) = r^3$.
- b) $f(r) = \ln(r)$.
- c) $f(r) = r^2 e^{-r}$.

E 4.8.4. Mostre que

$$\vec{\nabla}^2 f(r) = 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r),$$

onde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Utilize este resultado para mostrar que:

- a) $\vec{\nabla}^2 \ln(r) = \frac{1}{r^2}$.
- b) $\vec{\nabla}^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.
- c) $\vec{\nabla}^2 \ln(r^2) = \frac{2}{r^2}$.
- d) $\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

E 4.8.5. Uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é atraída para a origem por uma força central dada por $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{r}$. Mostre que o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é constante, isto é, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

E 4.8.6. Mostre que um campo central $\vec{F}(r) = f(r) \hat{r}$ é irrotacional.

Capítulo 5

Integral de Linha

Neste capítulo, estudamos a integral de linha e teoremas relacionados.

5.1 A integral de linha para um campo escalar

Para um campo escalar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, a integral de linha ao longo de uma curva suave por partes é definida por

$$\int_C f(\vec{r}) \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| \, dt,$$

onde $\vec{r}$ é uma parametrização para C tal que $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(b)$ são os pontos iniciais e finais da curva.

5.2 A integral de linha para um campo vetorial

Para um campo vetorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, a integral de linha ao longo de uma curva suave por partes C é definida por

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt$$

onde $\vec{r}$ é uma parametrização para C tal que $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(b)$ são os pontos iniciais e finais da curva, que está no sentido $\vec{r}(a) \rightarrow \vec{r}(b)$.

Exercícios

E 5.2.1. Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para cada campo e curva dados.

- a) $\vec{F} = (x + 2y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, e C : $x = \cos(t)$, $y = 4\sin(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
- b) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - x\vec{j}$, e C : arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ limitado ao primeiro quadrante e orientado no sentido $(1,0)$ a $(0,1)$.
- c) $\vec{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i}$ e C é o segmento de reta que liga o ponto $(-1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 0)$.
- d) $\vec{F} = xe^z\vec{j} + z^2\vec{k}$ e C é o caminho que liga o ponto $(-1, 1, 0)$ até o ponto $(1, 1, 0)$ no plano xy ao longo da curva de equação $y = x^{2n}$ onde n é um número natural. Interprete o caso $n = 0$.
- e) O mesmo campo vetorial do item anterior e C é a poligonal formada por três segmentos de reta ligando os pontos $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 0)$, nesta sequência. Relacione com o item anterior quando n é grande.

E 5.2.2. Calcule o trabalho ao se deslocar uma partícula no campo de força $\vec{F} = 3x^2\vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z\vec{k}$ ao longo.

- a) da reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$.
- b) da curva $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ de $t = 0$ até $t = 1$.
- c) da curva definida por $x = 4y$, $3x^3 = 8z$, de $x = 0$ até $x = 2$.

E 5.2.3. Dado $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$, calcule $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva C dada pela união da curva $y = x^2$, desde o ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$, da curva $y = \sqrt{x}$, desde o ponto $(1, 1)$ até $(0, 0)$.

5.3 O Teorema Fundamental para Integral de Linha

Teorema 5.3.1. *Seja $\vec{F}$ um campo vetorial definido numa região R do espaço e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x, y, z)$ dois pontos em R . Se $\vec{F}$ é conservativo, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ para algum potencial φ , então*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0), \quad (5.1)$$

para qualquer curva C suave por partes em R com início em P_0 e extremidade em P .

Reciprocamente, se

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

é independente da curva que começa em P_0 e termina em P_1 , então o campo é conservativo.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha C uma curva suave parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, com início em $\vec{r}(t_0) = P_0$ e fim em $\vec{r}(t_1) = P$. Então, supondo que $\vec{F}$ é conservativo, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia, temos que o termo

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

é a derivada total de φ com respeito a t . Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{D\varphi}{Dt} dt \\ &= \varphi(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) - \varphi(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \\ &= \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado que a expressão (5.1) é válida para qualquer curva C que liga dois pontos na região, definimos a função

$$\varphi(x, y, z) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde C é uma curva qualquer que começa em P_0 e termina em P . Mostraremos que ϕ é o potencial do campo $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$, ou seja, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$. De fato,

observe que

$$\begin{aligned}
 \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x + \Delta x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x + \Delta x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(x, y, z)}^{(x_0, y_0, z_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.
 \end{aligned}$$

Parametrizando um caminho reto entre (x, y, z) e $(x + \Delta x, y, z)$ por $\vec{r} = t\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $x \leq t \leq x + \Delta x$, temos:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) &= \int_x^{x + \Delta x} \vec{F} \cdot \vec{r}' dt \\
 &= \int_x^{x + \Delta x} (F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}) \cdot \vec{i} dt \\
 &= \int_x^{x + \Delta x} F_1(t, y, z) dt.
 \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema do valor médio,

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} F_1(t, y, z) dt \\
 &= \frac{1}{\Delta x} F_1(\xi, y, z), \quad x \leq \xi \leq x + \Delta x.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} F_1(\xi, y, z) \\
 &= F_1(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos demonstrar que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2(x, y, z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3(x, y, z),$$

ou seja, $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$. □

Exercícios

E 5.3.1. Calcule o trabalho realizado pela força conservativa $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ ao deslocar uma partícula desde $P_0(1,1)$ até $P_1(0,0)$.

5.4 Relação entre campos irrotacionais e conservativos

Teorema 5.4.1. *Seja $\vec{F}$ um campo vetorial definido numa região R do espaço. Então $\vec{F}$ é conservativo, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ para algum potencial φ , se e somente se $\vec{F}$ é irrotacional, isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.*

Demonstração. Se $\vec{F}$ é conservativo, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, então pelo item 8 da tabela de identidades 4.1,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}.$$

Reciprocamente, dado $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ com

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

temos

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (5.3)$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (5.4)$$

Agora, defina

$$\varphi(x,y,z) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.5)$$

onde C é a curva que liga os pontos (x_0, y_0, z_0) ao ponto (x, y, z) através das arestas do paralelepípedo de vértices (x_0, y_0, z_0) , (x, y_0, z_0) , (x_0, y, z_0) , (x, y, z_0) , (x_0, y_0, z) , (x, y_0, z) , (x_0, y, z) e (x, y, z) . Isto é, C pode ser escrito com a união de três segmentos de retas, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, com as seguintes parametrizações:

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = t\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}, \quad x_0 \leq t \leq x,$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = x\vec{i} + t\vec{j} + z_0\vec{k}, \quad y_0 \leq t \leq y$$

e

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + t\vec{k}, \quad z_0 \leq t \leq z.$$

Mostraremos que φ é um potencial para o campo $\vec{F}$, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$. De fato, da equação (5.5), usamos as parametrizações das curvas C_1 , C_2 e C_3 para obter

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot \vec{r}'_1(t)dt + \int_{y_0}^y \vec{F} \cdot \vec{r}'_2(t)dt + \int_{z_0}^z \vec{F} \cdot \vec{r}'_3(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x F_1(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z F_3(x, y, t)dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, derivamos a expressão (5.6) em z e obtemos a última componente do campo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3(x, y, z). \quad (5.7)$$

Agora, derivamos a expressão (5.6) em y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= F_2(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z F_3(x, y, t)dt \\ &= F_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial F_3(x, y, t)}{\partial y} dt \\ &= F_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial F_2(x, y, t)}{\partial z} dt. \end{aligned}$$

onde usamos a expressão (5.2) na última passagem. Assim, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para obter

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2(x, y, z_0) + F_2(x, y, z) - F_2(x, y, z_0) = F_2(x, y, z). \quad (5.8)$$

Finalmente, derivamos a expressão (5.6) com respeito a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= F_1(x, y_0, z_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0)dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z F_3(x, y, t)dt \\ &= F_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial F_2(x, t, z_0)}{\partial x} dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial F_3(x, y, t)}{\partial x} dt \\ &= F_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial F_1(x, t, z_0)}{\partial y} dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial F_1(x, y, t)}{\partial z} dt, \end{aligned}$$

onde usamos as expressões (5.3) e (5.4) na última passagem. Assim, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para concluir que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= F_1(x, y_0, z_0) + F_1(x, y, z_0) - F_1(x, y_0, z_0) + F_1(x, y, z) - F_1(x, y, z_0) \\ &= F_1(x, y, z)\end{aligned}\quad (5.9)$$

Portanto, das expressões (5.9), (5.8) e (5.7), concluímos que $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$, ou seja, $\vec{F}$ é um campo conservativo. $\square$

Exercícios resolvidos

ER 5.4.1. Dado o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = 2xy^3 + (1 + 3x^2y^2)\vec{j}$.

- Mostre que o campo é irrotacional.
- Encontre uma função potencial $\varphi(x, y, z)$.
- Calcule o trabalho $W := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ao longo de uma curva que liga o ponto $(1, 4, 0)$ até o ponto $(3, 1, 0)$.
- Trace algumas curvas equipotenciais de $\varphi(x, y, z)$.

Solução. Para o item a), basta calcular o rotacional:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3 & 1 + 3x^2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (6xy^2 - 6xy^2)\vec{k} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

A função potencial φ deve satisfazer $\vec{\nabla} \varphi = \vec{F}$, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2xy^3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 1 + x^2y^2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Da primeira equação, temos $\varphi(x, y, z) = x^2y^3 + C(y, z)$. Diferenciando esta expressão substituindo na segunda condição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 + C(y, z)) = 1 + x^2y^2.$$

Isso implica $C_y(y, z) = 1$, isto é, $C(y, z) = y + D(z)$. Da última expressão vemos que $D'(z) = 0$ e portanto:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y^3 + y + E.$$

Para o item c), basta aplicar o teorema das integrais de linha:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(3, 1, 0) - \varphi(1, 4, 0) \\ &= (9 + 1 + E) - (64 + 4 + E) = -58. \end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 5.4.1. Determine se o campo $\vec{F}$ é conservativo. Se for, encontre a função potencial ϕ .

- a) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- b) $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + 5xy^2\vec{j}$.
- c) $\vec{F} = (\cos(y) + y \cos(x))\vec{i} + (\sin(x) - x \sin(y))\vec{j}$.
- d) $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + (xy + 3z^2)\vec{k}$.

E 5.4.2. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para $\vec{F} = (e^y + ye^x)\vec{i} + (xe^y + e^x)\vec{j}$ e C é a curva dada por $\vec{r} = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + (\ln(t))\vec{j}$, $1 \leq t \leq 2$.

(Sugestão: Determine primeiro se $\vec{F}$ é conservativo).

E 5.4.3. Se $\vec{A} = (4xy - 3x^2 z^2)\vec{i} + 2x^2 \vec{j} - 2x^3 z\vec{k}$, prove que $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ é independente da curva que liga dois pontos dados.

E 5.4.4. Seja $\vec{E} = r\vec{r}$.

- a) Prove que existe um potencial ϕ tal que $\vec{E} = \vec{\nabla}\phi$.
- b) Calcule ϕ .
- c) Calcule o valor de $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$ para C a circunferência de raio unitário no plano xy orientada no sentido horário. É possível conhecer o valor de $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$ onde C é uma curva fechada qualquer?

E 5.4.5. Calcule o trabalho para se deslocar uma partícula nos campos de força conservativa dados por:

a) $\vec{F} = -k\vec{r}$ (Lei de Hooke).

b) $\vec{F} = \frac{1}{r^3}\vec{r}$ (Lei do inverso do quadrado).

5.5 O Teorema de Green

Teorema 5.5.1. *Seja C uma curva simples, fechada e derivável, D a região do plano delimitada por C , e P e Q duas funções reais de variável real com derivadas parciais contínua numa região contendo D , então:*

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Em termo de notação, também se costuma usar $\oint_C$ para enfatiza que o caminho C é fechado. Nesse caso, supondo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, podemos escrever o teorema da forma

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Capítulo 6

Integral de Superfície

Neste capítulo, estudamos a integral de superfície e teoremas relacionados.

6.1 Definição de integral de superfície para um campo escalar

Seja $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h = h(x, y, z)$, um campo escalar definido em todos os pontos de uma superfície regular S . Assumimos que $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ seja uma parametrização para S . A integral de superfície de h sobre S é definida por:

$$\iint_S h dS = \iint_R h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv, \quad (6.1)$$

onde dS é o elemento infinitesimal de área sobre a superfície.

Exemplo 6.1.1. Considere a esfera de raio a

$$\vec{r} = a \sin(u) \cos(v) \vec{i} + a \sin(u) \sin(v) \vec{j} + a \cos(u) \vec{k}, \quad a > 0, \quad 0 \leq u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

e o campo $h(x, y, z) = 1$. Vamos calcular a área da esfera dada por $\iint_S h dS$. Começamos com as derivadas parciais de $\vec{r}$, dadas por

$$\vec{r}_u = a \cos(u) \cos(v) \vec{i} + a \cos(u) \sin(v) \vec{j} - a \sin(u) \vec{k}$$

e

$$\vec{r}_v = -a \sin(u) \sin(v) \vec{i} + a \sin(u) \cos(v) \vec{j}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos(u) \cos(v) & a \cos(u) \sin(v) & -a \sin(u) \\ -a \sin(u) \sin(v) & a \sin(u) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= a^2 \sin^2(u) \cos(v) \vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v) \vec{j} \\
 &+ (a^2 \cos(u) \sin(u) \cos^2(v) + a^2 \cos(u) \sin(u) \sin^2(v)) \vec{k} \\
 &= a^2 \sin^2(u) \cos(v) \vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v) \vec{j} + a^2 \cos(u) \sin(u) \vec{k}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

e

$$\begin{aligned}
 \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= a^2 \sqrt{\sin^4(u)(\cos^2(v) + \sin^2(v)) + \cos^2(u) \sin^2(u)} \\
 &= a^2 \sqrt{\sin^4(u) + \cos^2(u) \sin^2(u)} \\
 &= a^2 \sin(u) \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u)} \\
 &= a^2 \sin(u).
 \end{aligned}$$

onde usamos que $0 \leq \sin(u) \leq 1$, visto que $0 \leq u \leq \pi$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \iint_S h dS &= \iint_R h(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin(u) du dv \\
 &= 2\pi a^2 [-\cos(u)]_0^\pi \\
 &= 4\pi a^2.
 \end{aligned}$$

6.1.1 Superfície definida como função de duas variáveis

Nessa seção, vamos calcular a versão particular da definição (6.1) quando a superfície é definida como função de duas variáveis, isto é, $z = f(x, y)$ ou $y = f(x, z)$ ou ainda $x = f(y, z)$. Considere o caso onde a superfície S é dado pela função $f : D \subset \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)$ (os outros dois casos são análogos). Uma parametrização para a superfície S é

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k},$$

Calculamos as derivadas $\vec{r}_x = \vec{i} + f_x \vec{k}$, e $\vec{r}_y = \vec{j} + f_y \vec{k}$ e fazemos

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, definimos G tal que a superfície seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$, isto é, $G(x, y, z) = z - f(x, y)$ e observamos que

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \vec{\nabla} G. \quad (6.3)$$

Analogamente, em qualquer dos outros dois casos $y = f(x, z)$ ou $x = f(y, z)$, definimos G tal que a superfície seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$ e a expressão (6.3) continua válida, isto é,

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \vec{\nabla} G \quad \text{ou} \quad \vec{r}_y \times \vec{r}_z = \vec{\nabla} G.$$

Portanto, a versão da definição (6.1) para o caso onde a superfície é definida por uma função de duas variáveis f é dada por

$$\iint_S h dS = \iint_R h \|\vec{\nabla} G\| dA, \quad (6.4)$$

onde R é o domínio de h e h deve estar sobre os pontos da superfície.

Exemplo 6.1.2. Vamos calcular novamente a integral de superfície do exemplo 6.1.1. Considere a equação da esfera de raio a , $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o campo $h(x, y, z) = 1$. Vamos calcular a área da superfície da esfera dada por $\iint_S h dS$. Para aplicar a expressão (6.4), separamos a esfera em duas superfícies: S_1 de equação $z = h_1(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e S_2 de equação $z = h_2(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Assim,

$$\iint_S h dS = \iint_{S_1} h dS + \iint_{S_2} h dS.$$

Definimos $G_1 = z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $G_2 = z + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e calculamos

$$\vec{\nabla} G_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{j} + \vec{k}$$

Logo,

$$\|\vec{\nabla} G_1\| = \|\vec{\nabla} G_2\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Como $h(x, y, z) = 1$, temos:

$$\iint_S h dS = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA + \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA = 2 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA,$$

onde D é o disco de raio a no plano xy . Portanto, integrando em coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_S h dS &= 2 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\
 &= 2\pi a \int_0^a \frac{2r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\
 &= 2\pi a \left[\frac{-\sqrt{a^2 - r^2}}{1/2} \right]_0^a \\
 &= 4\pi a^2.
 \end{aligned}$$

6.2 Definição de integral de superfície para um campo vetorial

Considere S uma superfície orientável e $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $(u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ uma parametrização regular, sendo $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ o vetor normal à S . Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ um campo vetorial definido em todos os pontos de S . Então definimos a integral de superfície do campo vetorial $\vec{F}$ sobre S como:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv. \quad (6.5)$$

Exemplo 6.2.1. Seja S a esfera de raio a parametrizada por

$$\vec{r} = a \sin(u) \cos(v)\vec{i} + a \sin(u) \sin(v)\vec{j} + a \cos(u)\vec{k}, \quad a > 0, \quad 0 \leq u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

e o campo $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Vamos calcular o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S dado por $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. O produto vetorial

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = a^2 \sin^2(u) \cos(v)\vec{i} + a^2 \sin^2(u) \sin(v)\vec{j} + a^2 \cos(u) \sin(u)\vec{k}$$

foi calculado na equação (6.2). Observe que a parametrização define uma orientação para fora da superfície. De fato, basta pegar um ponto, por exemplo, $u = v = \pi/2$ e calcular $\vec{r} = a\vec{j}$ e $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = a^2\vec{j}$, ou seja, no ponto $(0,a,0)$, a normal aponta para fora. Como

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) &= x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \\
 &= a \sin(u) \cos(v)\vec{i} + a \sin(u) \sin(v)\vec{j} + a \cos(u)\vec{k},
 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) &= a^3 \sin^3(u) \cos^2(v) + a^3 \sin^3(u) \sin^2(v) + a^3 \cos^2(u) \sin(u) \\ &= a^3 \sin^3(u) + a^3 \cos^2(u) \sin(u) \\ &= a^3 \sin(u).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_R \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \sin(u) du dv \\ &= 2\pi a^3 \int_0^\pi \sin(u) du \\ &= 4\pi a^3.\end{aligned}$$

6.2.1 Superfície definida como função de duas variáveis

Nessa seção, vamos calcular a versão particular da definição (6.5) quando a superfície é definida como função de duas variáveis, isto é, $z = f(x, y)$ ou $y = f(x, z)$ ou ainda $x = f(y, z)$. Considere o caso onde a superfície S é dado pela função $f : D \subset \mathbb{R}^2, D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)$ (os outros dois casos são análogos). Uma parametrização para a superfície S é

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k},$$

onde o vetor normal a superfície é

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|}.$$

Aqui, o sinal $\pm$ é escolhido para ajustar a orientação da parametrização à orientação da superfície definida por f . Calculamos as derivadas $\vec{r}_x = \vec{i} + f_x\vec{k}$, e $\vec{r}_y = \vec{j} + f_y\vec{k}$ e fazemos

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, definimos G tal que a superfície seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$, isto é, $G(x, y, z) = z - f(x, y)$ e observamos que

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \vec{\nabla} G. \quad (6.6)$$

Analogamente, em qualquer dos outros dois casos $y = f(x, z)$ ou $x = f(y, z)$, definimos G tal que a superfície seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$ e a expressão (6.6) continua válida, isto é,

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \vec{\nabla} G \quad \text{ou} \quad \vec{r}_y \times \vec{r}_z = \vec{\nabla} G.$$

Portanto, a versão da definição (6.5) para o caso onde a superfície é definida por uma função de duas variáveis f é dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA, \quad (6.7)$$

onde R é o domínio de f , $\vec{F}$ deve estar sobre os pontos da superfície e o sinal $\pm$ deve ser escolhido para que $\pm \vec{\nabla} G$ esteja no sentido da orientação da superfície.

Exemplo 6.2.2. Vamos calcular o fluxo do campo $\vec{F} = x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j}$ através da superfície plana S dada pela equação $x + y + z = 1$, limitada ao primeiro octante e orientada no sentido da origem em direção ao primeiro octante. Primeiro, definimos $z = f(x, y) = 1 - x - y$ e $G = z - 1 + x + y$ e calculamos $\vec{\nabla} G = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Observamos que a orientação de $\vec{\nabla} G$ está no mesmo sentido que o vetor normal, então escolhemos o sinal positivo na expressão (6.7). Também, observe que o campo é constante na variável z , ou seja, $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, 1 - x - y) = x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= + \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + 3y^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + y^3 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x) + (1-x)^3 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 \right) - \left(0 - 0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.2.3. Nesse exemplo vamos calcular o fluxo do campo $\vec{F} = 3z^2\vec{i} + 6\vec{j} + 6xz\vec{k}$ através da superfície S dada pela equação $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, orientada no sentido em que a componente $\vec{i}$ do vetor normal é sempre positiva. Primeiro, definimos $y = f(x, z) = x^2$ e $G = y - x^2$ e calculamos $\vec{\nabla}G = -2x\vec{i} + \vec{j}$. Observamos que a orientação de $\vec{\nabla}G$ está com componente $\vec{i}$ negativa, então escolhemos o sinal negativo na expressão (6.7). Também, observe que o campo é constante na variável y , ou seja, $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, x^2, z) = 3z^2\vec{i} + 6\vec{j} + 6xz\vec{k}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= - \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G dA \\ &= - \int_0^2 \int_0^3 -6xz^2 + 6dz dx \\ &= - \int_0^2 \left[-2xz^3 + 6z \right]_{z=0}^{z=3} dx \\ &= - \int_0^2 -54x + 18dx \\ &= - \left[-27x^2 + 18x \right]_0^2 \\ &= -(-108 + 36) = 72. \end{aligned}$$

Exemplo 6.2.4. Nesse exemplo, vamos recalculer o fluxo do exemplo 6.2.1. Seja S a esfera de raio a dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

orientada para fora, e o campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Vamos calcular o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S dado por $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Para aplicar a expressão (6.7), separamos a esfera em duas superfícies: S_1 de equação $z = h_1(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e S_2 de equação $z = h_2(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Assim,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} dS.$$

Definimos $G_1 = z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $G_2 = z + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e calculamos

$$\vec{\nabla}G_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla}G_2 = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Observe que $\vec{\nabla}G_1$ está no sentido para fora da superfície e $\vec{\nabla}G_2$ no sentido para dentro. Logo, vamos escolher um sinal positivo e outro negativo na definição (6.7). Assim, sabendo que o campo na superfície S_1 é dado por $\vec{F}_1 = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\vec{k}$ e, o campos na superfície S_2 é dado por $\vec{F}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\vec{k}$, temos:

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{F}_1 \cdot \vec{\nabla}G_1 dA - \iint_D \vec{F}_2 \cdot \vec{\nabla}G_2 dA \\ &= \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA \\ &\quad - \iint_D -\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA \\ &= 2 \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA \\ &= 2 \iint_D \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA,\end{aligned}$$

onde D é o disco de raio a no plano $z = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 2\pi a^2 \left[-\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{1/2} \right]_0^a \\ &= 4\pi a^3.\end{aligned}$$

Exemplo 6.2.5. Considere a superfície S

$$z = 0, x^2 + y^2 \leq 1,$$

orientada no sentido decrescente do eixo z , isto é, $\vec{n} = -\vec{k}$. Considere também o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$. Vamos calcular o valor do fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Como $z = f(x, y) = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, definimos a função $G(x, y, z) = z$ e calculamos

$$\vec{\nabla}G = \vec{k}.$$

Observe que $\vec{\nabla}G$ e $\vec{n}$ estão em sentidos oposto e, portanto, na aplicação da expressão (6.7), vamos escolher o sinal negativo. Aplicamos o campo $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$

sobre a superfície $z = 0$ e obtemos $\vec{F} = (2 + x)\vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}\Phi &:= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\ &= - \iint_A (2 + x) dA\end{aligned}$$

Resolvemos em coordenadas polares da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Phi &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r \cos(\theta)) r d\theta dr \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r + r^2 \cos(\theta)) d\theta dr \\ &= -2\pi \int_0^1 2r dr - \int_0^1 \left([r^2 \sin(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Exemplo 6.2.6. Considere a superfície S

$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

orientada na direção crescente do eixo z , isto é, o vetor $\vec{n}$ tem componente na direção $\vec{k}$ sempre positiva. Considere também o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$. Vamos calcular o valor do fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Como $z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, definimos $G(x, y, z) = z - 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e calculamos

$$\vec{\nabla} G = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} + \vec{k}.$$

Observe que $\vec{\nabla} G$ e $\vec{n}$ estão no mesmo sentido e, portanto, na aplicação da expressão (6.7), vamos escolher o sinal positivo. Aplicamos o campo $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$ sobre a superfície $z = 0$ e obtemos $\vec{F} = (2 + (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + x)\vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned}\Phi &:= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\ &= \iint_A \left(2 + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + x \right) dA\end{aligned}$$

Resolvemos em coordenadas polares e obtemos

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + (1-r)^2 + r \cos(\theta)) r d\theta dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r - 2r^2 + r^3 + r^2 \cos(\theta)) d\theta dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 (3r - 2r^2 + r^3) dr + \int_0^1 \left([r^2 \sin(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{2r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right]_0^1 = \frac{13\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

ER 6.2.1. Seja S a porção da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$, acima do plano xy , orientada com componente $\vec{k}$ do vetor normal positiva. Encontre o fluxo Φ através de S para o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Solução. Definimos $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $G = z - 1 + x^2 + y^2$ e calculamos $\vec{\nabla}G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$. Também, como a componente $\vec{k}$ desse gradiente é positiva, escolheremos a sinal positivo na expressão (6.7). Colocamos o campo sobre a superfície, isto é, $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 \Phi &:= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
 &= + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G dA,
 \end{aligned}$$

onde D é o disco de raio unitário no plano $z = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \iint_D (x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) dA \\
 &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + (1 - x^2 - y^2)) dA \\
 &= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) r dr d\theta \\
 &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{6\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

◇

ER 6.2.2. Dados o campo vetorial $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e a porção da superfície S de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situada abaixo do plano $z = 1$, orientada com componente $\vec{k}$ do vetor normal positiva, calcule o fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Solução. Definimos $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $G = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ e calculamos $\vec{\nabla}G = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}$. Também, como a componente $\vec{k}$ desse gradiente é positiva, escolheremos a sinal positivo na expressão (6.7). O campo é constante na variável z , isto é, $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, f(x, y)) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Então, temos:

$$\begin{aligned}\Phi &:= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G dA,\end{aligned}$$

onde D é o disco de raio unitário no plano $z = 0$. Portanto,

◇

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k} \right) dA \\ &= \iint_D \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{r \cos(\theta) + r \sin(\theta)}{r} + 1 \right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (-\cos(\theta) - \sin(\theta) + 1) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(-\cos(\theta) - \sin(\theta) + 1) \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{2} [-\sin(\theta) + \cos(\theta) + \theta]_0^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$

ER 6.2.3. Seja S a superfície do cubo dado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, orientada para fora. Calcule o fluxo através de S para os seguintes campos vetoriais:

- $\vec{F} = x\vec{i}$
- $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

Solução. Em cada um dos itens, temos que calcular seis integrais de superfície em cada face do cubo, a saber, $S_1 : x = 1$, $S_2 : x = -1$, $S_3 : y = 1$, $S_4 : y = -1$, $S_5 : z = 1$ e $S_6 : z = -1$.

- a) Começamos com a face S_1 , definimos $x = f_1(y, z) = 1$, $G_1 = x - 1$ e calculamos $\vec{\nabla}G_1 = \vec{i}$. Observe que $\vec{\nabla}G_1$ está orientado no sentido de $\vec{n} = \vec{i}$ e $\vec{F} = x\vec{i} = \vec{i}$. Calculamos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} dA = 4,$$

onde 4 é a área do quadrado de lado 2. Analogamente,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} (-\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) dS = \iint_{S_2} dA = 4.$$

As demais integrais são nulas, visto que o fluxo só tem componente na direção $\vec{i}$. Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 8.$$

- b) Começamos com a face S_1 , definimos $x = f_1(y, z) = 1$, $G_1 = x - 1$ e calculamos $\vec{\nabla}G_1 = \vec{i}$. Observe que $\vec{\nabla}G_1$ está orientado no sentido de $\vec{n} = \vec{i}$ e $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calculamos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} dA = 4,$$

onde 4 é a área do quadrado de lado 2. Analogamente,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} (-\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) dS = \iint_{S_2} dA = 4.$$

Pela simetria do problema, vemos que as demais integrais são todas iguais a 4. Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 24.$$

- c) Começamos com a face S_1 , definimos $x = f_1(y, z) = 1$, $G_1 = x - 1$ e calculamos $\vec{\nabla}G_1 = \vec{i}$. Observe que $\vec{\nabla}G_1$ está orientado no sentido de $\vec{n} = \vec{i}$ e $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k} = \vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. Calculamos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} dA = 4,$$

onde 4 é a área do quadrado de lado 2. Analogamente, como em $S_2 : x = -1$ o campo assume a forma $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{i} + z^2\vec{k} = \vec{i} + y^2\vec{i} + z^2\vec{k}$, temos

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} (\vec{i} + y^2\vec{i} + z^2\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) dS = \iint_{S_2} dA = 4.$$

Observe que

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Pela simetria do problemas, teremos de forma análoga

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

e

$$\iint_{S_5} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

◇

ER 6.2.4. Calcule o fluxo de $\vec{F} = z\vec{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada para fora.

Solução. Começamos separando a esfera nos seguintes dois hemisférios: $S_1 : z = f_1(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $S_2 : z = f_2(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Definimos $G_1 = z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $G_2 = z + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e calculamos

$$\vec{\nabla} G_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{j} + \vec{k}.$$

Observe que $\vec{\nabla} G_1$ está orientada para fora e $\vec{\nabla} G_2$ está orientada para dentro. Logo, escolheremos para as integrais sobre S_1 e S_2 os sinais positivo e negativo, respectivamente, na expressão (6.7). O campo sobre cada uma das superfícies tem às formas: $\vec{F}_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \vec{k}$ e $\vec{F}_2 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_D \vec{F}_1 \cdot \vec{\nabla} G_1 dA - \iint_D \vec{F}_2 \cdot \vec{\nabla} G_2 dA, \end{aligned}$$

onde D é o disco de raio a no plano $z = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA - \iint_D (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dA \\ &= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA \\ &= 2\pi \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 6.2.1. Calcule o fluxo Φ do campo vetorial $\vec{F}$ através da superfície S .

- $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ e $S : z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy e orientada com componente $\vec{k}$ da normal positiva.
- $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$ e S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante e orientada da origem para o primeiro octante.
- $\vec{F} = z^2\vec{k}$ e S o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientada com componente $\vec{k}$ da normal positiva.
- $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ e S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os plano $z = 1$ e $z = 2$, orientada com componente $\vec{k}$ da normal negativa.

6.3 O Teorema da Divergência de Gauss

Teorema 6.3.1. *Seja V o volume de um sólido cuja superfície S é orientada para fora. Seja o campo vetorial $\vec{F}$ dado por*

$$\vec{F} = f(x,y,z)\vec{j} + g(x,y,z)\vec{i} + h(x,y,z)\vec{k},$$

onde as funções f , g e h possuem todas as derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo V . Então:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

Exemplo 6.3.1. Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente por

$$z = 0, x^2 + y^2 \leq 1.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$. Vamos calcular o valor do fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via teorema da divergência.

Temos $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r} 2z r dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^2 r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-r)^2 r dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r - 2r^2 + r^3) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Observe que as superfícies dos exemplos 6.2.5 e 6.2.5 foram a superfície fechada do exemplo 6.3.1. De fato, o fluxo calculado naqueles dois exemplos via parametrização direta foram -2π e $\frac{13\pi}{6}$, cuja soma é $\frac{\pi}{6}$, o mesmo valor calculado pelo Teorema da Divergência.

Exercícios resolvidos

ER 6.3.1. Seja S a superfície do cubo dado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, orientada para fora. Calcule o fluxo através de S para os seguintes campos vetoriais:

a) $\vec{F} = x\vec{i}$

b) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

c) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

Solução. Vamos utilizar o teorema da divergência de Gauss

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

a) Como $\nabla \cdot \vec{F} = 1$, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 1 dV = 8,$$

onde 8 é o volume do cubo de lado 2.

b) Como $\nabla \cdot \vec{F} = 3$, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 3 dV = 24.$$

c) Como $\nabla \cdot \vec{F} = 2x + 2y + 2z$, temos:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V (2x + 2y + 2z) dV \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x + 2y + 2z) dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

◇

ER 6.3.2. Calcule o fluxo de $\vec{F} = z\vec{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada para fora.

Solução. Como $\nabla \cdot \vec{F} = 1$, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 1 dV = \frac{4\pi a^3}{3},$$

onde o valor $\frac{4\pi a^3}{3}$ é o volume de uma esfera de raio a .

◇

ER 6.3.3. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$ através da superfície fechada e orientada para fora composta pelos planos $z = 0$ e $z = 2$ e a superfície $x^2 + y^2 = 9$.

Solução. Como $\nabla \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2z$, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 2z dV.$$

onde V é a região cilíndrica do enunciado. Vamos integrar em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^2 3(r^2 + 2z) r dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 \left[3r^3 z + z^2 r \right]_{z=0}^{z=2} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{6r^4}{4} + 2r^2 \right]_0^3 = 279\pi. \end{aligned}$$

◇

ER 6.3.4. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $\vec{F} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ através da superfície fechada e orientada para fora composta pelo plano $z = 0$ e o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Solução. Como $\nabla \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 dV.$$

onde V é o hemisfério do enunciado. Vamos integrar em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a 3\rho^2 \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^a 3\rho^4 \sin(\phi) d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3\rho^5}{5} \sin(\phi) \right]_{\rho=0}^{\rho=a} d\phi \\ &= \frac{6\pi a^5}{5} [-\cos(\phi)]_0^{\pi/2} = \frac{6\pi a^5}{5}. \end{aligned}$$

◇

ER 6.3.5. Seja Φ o fluxo do campo

$$\vec{F} = z^2 \vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada inferiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z$$

e superiormente pelo plano $z = 1$ orientada para fora. Encontre o fluxo Φ via parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência) e, depois, usando o Teorema da Divergência.

Solução. Para calcular via parametrização direta, escrevemos o fluxo Φ como a soma da contribuição da porção de cone (Φ_b) com a do disco unitário no plano $z = 1$ (Φ_t).

$$\Phi_t = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_{S_t} dS = \pi$$

A porção de cone está numa superfície de nível da seguinte função escalar:

$$G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Usaremos o teorema de mudança de variáveis:

$$\Phi_b = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \pm \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA$$

Onde o sinal é determinado conforme a orientação da superfície. Neste caso, escolhemos negativo porque a componente z do gradiente é positiva e a componente z da normal é negativa.

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = z^2$$

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \pm \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z^2) \rho d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\theta = -\frac{\pi}{2} \\ \Phi &= \Phi_t + \Phi_b = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Para calcular via Teorema da Divergência, calculamos a seguinte integral de volume:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^1 (2z) \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 6.3.1. Seja $\vec{F} = r^k \vec{r}$ onde k é uma constante. Seja S uma esfera de raio a centrada na origem e orientada para fora por $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{a}$.

- Calcule $\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.
- Para qual valor de k o valor da integral de superfície fica independente do raio a ?

E 6.3.2. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo Φ do campo $\vec{F}$ através da superfície S fechada e orientada para fora.

- $\vec{F} = 4x\vec{i} - 3y\vec{j} + 7z\vec{k}$ e S é o cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.
- $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ e S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- $\vec{F} = (x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ e S é a superfície do sólido limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = 1$.
- $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ e S é a superfície do sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$.
- $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + xy\vec{j} - (2xz + y)\vec{k}$ e S é a superfície do tetraedro no 1º octante, limitado por $x + y + z = 1$ e os planos coordenados.
- $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S a superfície do sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1$.

6.4 O Teorema de Stokes

Teorema 6.4.1. *Seja S uma superfície orientável, suave por partes, limitada por uma curva C , fechada, suave por partes e positivamente orientada com respeito a S . Seja o campo vetorial $\vec{F}$ dado por*

$$\vec{F} = f(x, y, z)\vec{j} + g(x, y, z)\vec{i} + h(x, y, z)\vec{k},$$

onde as funções f , g e h possuem todas as derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo S . Então:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

6.4.1 Exercícios resolvidos

ER 6.4.1. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = -\cos^2(x)y\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j}$ ao longo do retângulo cujos vértices são $(0,0,0)$, $(\pi,0,0)$, $(\pi,2,0)$ e $(0,2,0)$ no sentido anti-horário.

Solução.

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dS \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dy dx \end{aligned}$$

Agora, precisamos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\cos^2(x)y & z^2 + y^2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \cos^2(x)$$

E finalmente, temos:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi \int_0^2 \cos^2(x) dy dx \\ &= 2 \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \int_0^\pi (1 + \cos(2\phi)) dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

Onde foi usada a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}.$$

◇

ER 6.4.2. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força dado por:

$$\vec{F} = yx^2 \cos(z)\vec{i} - z\vec{j} + \sin(xz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 1, centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido horário.

Solução. Como a curva está sobre o plano xy , o vetor normal unitário deve ser $\vec{k}$ ou $-\vec{k}$. Pela orientação da curva e a regra da mão direita, identificamos que $\vec{n} = -\vec{k}$.

Agora calculamos:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &= 0 - x^2 \cos(z) = -x^2, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Parametrizamos em coordenadas polares:

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi)$$

$$\begin{aligned} W &= - \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 x^2 \rho d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \phi d\rho d\phi \\ &= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Onde se usou a identidade:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\phi)}{2} \right) d\phi = \pi$$

◇

ER 6.4.3. Dado $\vec{F} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k}$, encontre a maneira mais simples de calcular o fluxo do rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ através do hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $a > 0$, orientado com componente $\vec{k}$ da normal positiva.

Solução. A ideia aqui é aplicar o teorema de Stokes duas vezes para concluir que o fluxo através do hemisfério dado é igual ao fluxo através do disco no plano $z = 0$ com vetor normal unitário $\vec{\eta} = \vec{k}$. Assim o fluxo é dado por:

$$\Phi = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$

Calculamos o integrando:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \vec{F} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &= 1 - 4 = -3\end{aligned}$$

Portando o fluxo é -3 multiplicado pela área do disco:

$$\Phi = -3\pi a^2.$$

◇

ER 6.4.4. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = x^2\vec{i} + 4xy^3\vec{j} + y^2x\vec{k}$ ao longo da curva C que limita o retângulo no plano $z = y$ de vértices $P_0(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$, $P_2(1,3,3)$ e $P_3(0,3,3)$, no sentido $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_0$.

Solução. Sabemos que o retângulo está no plano $z = y$, pelo que a função $G(x, y, z)$ pode ser escolhida como:

$$G(x, y, z) = z - y \implies \vec{\nabla} G(x, y, z) = \vec{k} - \vec{j}$$

Agora calculamos o rotacional é dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 3xy\vec{i} - y^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}.$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}W &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iint_A \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA \\ &= \int_0^3 \int_0^1 (y^2 + 4y^3) dx dy \\ &= \int_0^3 (y^2 + 4y^3) dy = 9 + 81 = 90.\end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 6.4.1. Calcule a circulação do campo de velocidade $\vec{v} = 3z\vec{i} + 4x\vec{j} + 2y\vec{k}$ ao longo da curva C que limita o parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. A curva C está no plano xy orientada no sentido anti-horário.

E 6.4.2. Mostre que se $\vec{F} = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$, então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

isto é, o teorema de Stokes em duas dimensões recai no teorema de Green.

E 6.4.3. Use o teorema de Stokes para mostrar que:

a) se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$.

b) $\oint_C \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = 0$.

E 6.4.4. Considere a linha poligonal fechada C no plano xy formada pelos pontos $P_0(1,0,1)$, $P_1(3,0,1)$ e $P_2(2,1,1)$, no sentido $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_0$, e o campo $\vec{F} = -(z^3 + 1)y\vec{i} + (z^2 + 1)x\vec{j} + xye^z\vec{k}$. Use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Resposta dos Exercícios

Recomendamos ao leitor o uso criterioso das respostas aqui apresentadas. Devido a ainda muito constante atualização do livro, as respostas podem conter imprecisões e erros.

E 1.1.2.

a) $\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$

b) $\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$

c) $\int \cos^3(x) dx = \frac{1}{12} [\sin(3x) + 9 \sin(x)] + C$

E 1.1.3. Porque $\cos(x)$ assume valores no intervalo $[-1,1]$, portanto $\cos(x) - 1$ é não positivo, isto é, $\cos(x) - 1 \leq 0$.

E 1.1.4. $1 + \ln 4$

E 2.1.1. $\vec{f}'(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$, $\vec{g}'(t) = \vec{i} + \sinh(t)\vec{k}$, $\vec{h}'(t) = -2\sin(t)\vec{i} + 4\cos(t)\vec{j} + \vec{k}$

E 2.1.2. $\vec{j} - 2\vec{k}$, $\frac{r(\vec{t})}{dt} = 2t\vec{i} + e^t\vec{j} + 2\pi \sin \pi t \vec{k}$, $\frac{\vec{r}(1)}{dt} = 2\vec{i} + e\vec{j}$, $\frac{1}{3}\vec{i} + (e-1)\vec{j}$, $\left(\frac{1}{3}t^3 + C_1\right)\vec{i} + \left(e^t + C_2\right)\vec{j} + \left(-\frac{2}{\pi} \sin \pi t + C_3\right)\vec{k}$

E 2.1.5. $\frac{3}{2}$

E 2.1.6. Semicircunferência de raio 1 centrada em $(0,0,1)$ sobre o plano $z = 1$. Elipse de semi-eixos 1 e 2 centrada na origem sobre o plano xz . Hélice circular levogira de raio 1 e passo 2π . Semicircunferência de raio 2 centrada na origem sobre o plano xy e $y \geq 0$. Uma catenária sobre o plano xy . Uma hipérbole.

E 2.1.7. $c = \frac{3}{2\pi}$.

E 2.1.9. raio=1, centro na origem. $Q1 : 0 < t < 1$, $Q2 : t > 1$, $Q3 : t < -1$, $Q4 : -1 < t < 0$. A curva é a circunferência menos o ponto $\langle -1,0 \rangle$.

E 2.1.10. a) $\|\hat{r}\|$ constante implica $\hat{r} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} = 0$. Ademais, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = r'\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \hat{r} = r'\|\hat{r}\|^2 + r\frac{d\hat{r}}{dt} \cdot \hat{r} = r'$.
b) $\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. c) a partir de a), multiplica numerador e denominador por $r(t)$. d) $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r^{-1} \vec{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(r^{-1} \right) \vec{r} + r^{-1} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{r'}{r^2} \vec{r} = \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}{r^3} \vec{r}$ pela parte c).

E 2.1.11.

a) $-3(2t + 1).$

b) $-48t^3\vec{i} - (3t^2 + 2t)\vec{j} - 20t^4\vec{k}.$

c) $(6t - 48t^3)\vec{i} - (2t + 30t^2 - 5t^4)\vec{j} + (3t^2 - 20t^4)\vec{k}.$

E 2.2.1. $L = \sqrt{5} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{2}.$

E 2.2.2. $L = \frac{5\sqrt{30}-4\sqrt{3}}{9}.$

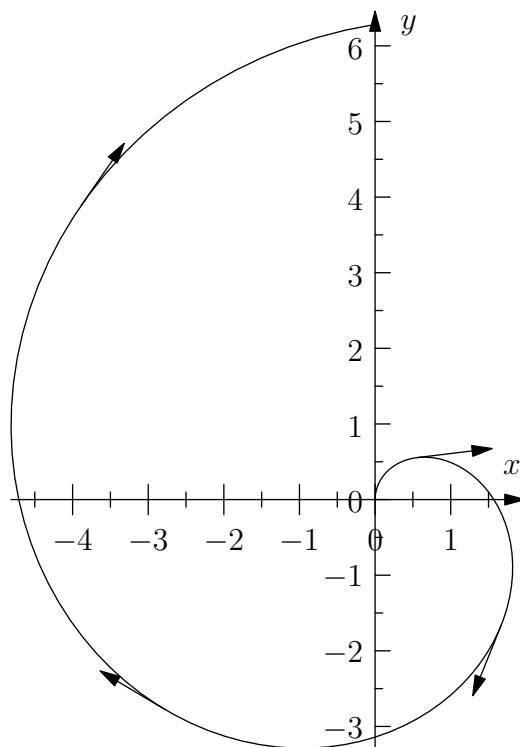
E 2.2.3. $L = \frac{14\sqrt{6}}{9}.$

E 2.3.2.

a) $\vec{T} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{N} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

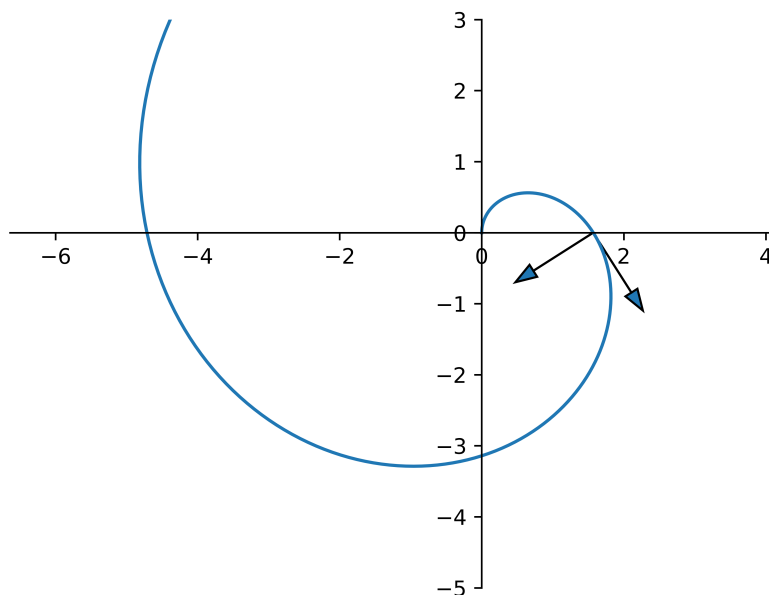
a) $\vec{T} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

E 2.3.5. $\vec{B}(t) = -\vec{k}.$



E 2.3.6.

E 2.3.8. $\vec{T} = \frac{2}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{i} + \frac{-1+3t^{3/2}}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{j} + \frac{1+3t^{3/2}}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{k}, \vec{N} = \frac{-2t^{3/2}}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{i} + \frac{1+t^{3/2}}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{j} + \frac{1-t^{3/2}}{\sqrt{6+18t^3}}\vec{k}$ e $\vec{B} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{3}}.$

**E 2.3.10.**

Para o comentário sobre a derivada da norma ao quadrado, observe que $r^2 = t^2$, assim:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = t > 0$$

Em $t = \pi/2$, $\vec{r} = \frac{\pi}{2}\vec{i}$, isso é compatível com o fato de que a tangente tem componente positivo nessa direção (não é paralelo ao eixo y como na circunferência).

E 2.3.11. A condição é

$$\frac{d}{dt} \|\vec{r}'(t)\| = 0$$

E 2.3.12. O vetor $\vec{N}$ se mantém e os outros dois invertem de sentido.

E 2.4.2. A torção é constante em todos os pontos da hélice e é dada por $\tau = \frac{c}{a^2 + c^2}$. A torção máxima para um dado $a > 0$ é $\frac{1}{2a}$ quando $c = a$ e é mínimo quando $c = -a$.

E 2.5.1.

a) $\kappa(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

b) $\kappa(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

c) $\kappa(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

E 2.5.2. $\rho(0) = \frac{1}{2}.$

E 2.5.3. $t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \right).$

E 2.5.4. $\kappa = \frac{a}{a^2+c^2}, \tau = \frac{c}{a^2+c^2}, \tau_{min} = -\frac{1}{2a}$ e $\tau_{max} = \frac{1}{2a}$

E 2.5.6. $\sqrt{40}m/s$

E 2.5.7.

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) \cdot (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) \quad (2.17)$$

$$= a_T^2 \vec{T} \cdot \vec{T} + a_N a_T \vec{T} \cdot \vec{N} + a_T a_N \vec{T} \cdot \vec{N} + a_N^2 \vec{T} \cdot \vec{T} \quad (2.18)$$

E 2.5.8. $\rho_{min} = \frac{a^2}{b}$ e $\rho_{max} = \frac{b^2}{a}$. Quando $a = b$, a elipse é uma circunferência e o raio de curvatura é constante igual a $a = b$. $a = 100m$ e $b = 200m$.

E 2.5.9.

a) $\vec{v} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right), \vec{a} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$

b) $\vec{v}(0) = (1, -1), \vec{a}(0) = (1, 1).$

c) $\vec{v}(\ln(2)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right), \vec{a}(\ln(2)) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right).$

d) $\vec{v} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right), \vec{a} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$

E 2.5.11. $\|\vec{v}(t)\|_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}, P \left(\frac{3}{16}, -\frac{1}{16} \right).$

E 2.5.12. 15^0

E 2.5.13. $\left(P \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16} \right) \right).$

E 2.5.16.

a) $a_T = 0, a_N = 2.$

b) $a_T = 0, a_N = \sqrt{2}.$

c) $a_T = 2\sqrt{5}, a_N = 2\sqrt{5}.$

d) $a_T = \frac{22}{\sqrt{14}}, a_N = \sqrt{\frac{38}{7}}.$

E 2.5.17. $\frac{3}{2}.$

E 2.5.18.

a) $\vec{v} = 6 \sin(2t)\vec{i} + (4 \cos(2t) - 4)\vec{j} + t^2\vec{k}$ e $\vec{r} = (-3 \cos(2t) + 3)\vec{i} + (2 \sin(2t) - 4t)\vec{j} + \frac{8}{3}t^3\vec{k}.$

b) $\vec{v} = (1 - e^{-t})\vec{i} + (3t^2 + 6t)\vec{j} + (3 - 3 \cos(t))\vec{k}$ e $\vec{r} = (t - 1 + e^{-t})\vec{i} - (t^3 + 3t^2)\vec{j} + (3t - 3 \sin(t))\vec{k}.$

E 2.5.19.

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= 2\operatorname{sen}(t)\vec{i} + [1 - 2\cos(t)]\vec{j}, \\
a(t) &= 2, \\
a_N &= \frac{4 - 2\cos(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}, \\
a_T &= \frac{2\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{5 - 4\cos(t)}}.
\end{aligned}$$

Para verificar a identidade, observe que:

$$\begin{aligned}
a_N^2 + a_T^2 &= \frac{16 - 16\cos(t) + 4\cos^2(t) + 4\operatorname{sen}^2(t)}{5 - 4\cos(t)} \\
&= \frac{20 - 16\cos(t)}{5 - 4\cos(t)} = 4.
\end{aligned}$$

E 4.3.1.

- a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2x + y$ e $\vec{\nabla} \times \vec{F} = z\vec{i}$
- b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = ye^{xy} + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(2z)$ e $\vec{\nabla} \times \vec{F} = -xe^{xy}\vec{k}$

E 4.3.3. $\vec{\nabla} f = 10\vec{i} - 4\vec{j} + 16\vec{k}$ e $\|\vec{\nabla} f\| = 2\sqrt{93}$.**E 4.8.3.**

- a) $3r\vec{r}$.
- b) $\frac{\vec{r}}{r^2}$.
- c) $(2 - r)e^{-r}\vec{r}$.

E 5.2.1.

- a) $1 - \pi$.
- b) $-1 - \frac{\pi}{4}$.
- c) 1.
- d) $\frac{4n}{2n+1}$.
- e) 2.

E 5.2.2.

- a) 16.
- b) 14.2.
- c) 16.

E 5.2.3. $\frac{2}{3}$.

E 5.3.1. $-\frac{1}{2}$.

E 5.4.1.

a) $\phi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + C$.

b) Não é conservativo.

c) $\phi = x \cos(y) + y \sin(x) + C$.

d) $\phi = xyz + z^3 + C$.

E 5.4.2. $-1 + \ln(2)$.

E 5.4.4.

b) $\phi = \frac{r^3}{3} + C$.

c) 0

E 5.4.5.

a) $\phi = -\frac{kr^2}{2} + C$.

b) $\phi = -\frac{1}{r} + C$.

E 6.2.1.

a) 2π .

b) 1.

c) $\frac{\pi}{2}$.

d) $-\frac{14\pi}{3}$.

E 6.3.1.

a) $4\pi a^{k+3}$.

b) $k = -3$ (campo inverso do quadrado).

E 6.3.2.

a) 8.

b) 216π .

c) $3\pi a^2$.

d) 180π .

e) $\frac{1}{24}$.

f) $\frac{\pi}{2}$.

E 6.4.1. 16π

E 6.4.4.4

Referências Bibliográficas

- [1] L. Brand. *Vector Analysis*. Wiley, 1957.

Índice Remissivo

- aceleração
 - normal, 28
 - tangencial, 28
- campo
 - conservativo, 73, 77, 80
 - gradiente, 73
 - irrotacional, 73, 80
- campos radiais, 74
- campos vetoriais, 54
- centro de curvatura, 21
- curva, 5
- curvas e trajetórias, 4
- curvatura, 20
- derivada de uma função vetorial de uma variável, 5
- derivada do produto de um escalar por um vetor, 6
- derivada do produto escalar, 6
- derivada do produto vetorial, 7
- integral de linha, 76
- integral de superfície, 85
- integral de uma função vetorial de uma variável, 5
- limite de uma função vetorial de uma variável, 5
- operador
 - de segunda ordem, 59
 - laplaciano, 59
- orientação de uma curva, 5
- parametrização regular, 5
- quádricas, 52
- raio de curvatura, 21
- raio de torção, 24
- superfície, 47
- teorema fundamental para integral de linha, 77
- torção, 23, 24
- trajetórias, 4
- velocidade escalar, 14
- vetor binormal unitário, 15
- vetor normal unitário, 14
- vetor normal à uma superfície, 49
- vetor tangente, 13
- vetor tangente unitário, 13