

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Matrizes

Definição:

- Tabela de Elementos dispostos em Linhas (i) e Colunas (j).
- Representados por: $()$, $[]$, $||$ ou $|||$.
- Identificar a Matriz é sempre a Letra Maiúscula (A)
- Fórmula Geral: $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
- Onde "a" são os elementos da matriz, e "i" e "j" são as posições de linhas e colunas. (a_{11} , a_{12} , a_{22}).

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Tipos de Matrizes

- Matriz Quadrada**
 - Linhas (m) = Colunas (n) ou seja, $m = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } [8]$$

- Nula**
 - Todos os elementos são 0. $a_{ij} = 0$

$$B_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coluna**
 - São compostas por apenas UMA coluna ($n = 1$). (linhas não interferem)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Linha**
 - São compostas por apenas UMA linha ($m = 1$). (colunas não interferem).

$$[3 \ 0 \ -1] \text{ e } [0 \ 0]$$

- Diagonal**
 - É uma matriz Quadrada
 - $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$
 - Diagonal: $i = j$. (a_{11} , a_{22} , a_{33}).

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Identidade:**
 - $a_{ii} = 1$ $a_{ij} = 0$ e quando $i \neq j$.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Triangular

- Superior**
 - Matriz Quadrada
 - Elementos ABAIXO da diagonal são = 0
 - $m = n$, $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Inferior**
 - Matriz Quadrada
 - Elementos ACIMA da diagonal são = 0
 - $m = n$, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Simétrica

- Elementos Superiores são reflexos dos inferiores (excluindo a diagonal).
- $m = n$
- $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Adição

Definição:

- Duas Matrizes de mesma ordem ($m \times n$)
- $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$
- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

Propriedades

- $A + B = B + A$ (Comutativa)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade)
- $A + O = A$ (matriz NULA)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por um Escalar (k):

Definição:

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
- $k = \text{número real}$
- $k \cdot A = [ka_{ij}]_{m \times n}$

Propriedades

- $k(A+B) = kA + kB$
- $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- $O \cdot A = O$ (matriz nula)
- $k_1(k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2)A$

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Transposição

Definição

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
- $A' = [b_{ij}]_{n \times m}$
- Linhas de A (m) são as Colunas de A'
- $b_{ij} = a_{ji}$

Propriedades:

- Simétrica se, e somente se, $A = A'$
- $A'' = A$ (transposta da transposta é a matriz original)
- $(A + B)' = A' + B'$
- $(kA)' = kA'$ (k é escalar)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Multiplicação

Definição

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
- $B = [b_{rs}]_{n \times p}$
- $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$

Observação:

- Só pode multiplicar A . B, SE o número N de colunas de A for igual ao número N de linhas de B, $C = AB_{m \times p}$
- A obtenção dos elementos C_{ij} se dá a partir da multiplicação de a_i (linha) com b_j (coluna) somando os produtos.

Propriedades

- $AB \neq BA$
- $AI = IA = A$ (Identidade)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade)
- $(A+B)C = AC + BC$ (distributividade)
- $(AB)C = A(BC)$ (associatividade)
- $(AB)' = B'A'$ (a ordem importa!)
- $OA = O, AO = O$ (Matriz Nula)

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2(-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4(-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5(-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: (Impossível)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$(c_1 \quad c_2)$
 $2 \neq 3$
n̄ pode