

Algebra Linear: 31/10

Combinação Linear

É uma operação que é feita numa mistura de adição e com a multiplicação por escalon.

Dados as números reais a e b , a operação a seguir é uma combinação linear.

$$a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

Exemplo:

$$2(-1, 5) - 3(-2, 1) = (2(-1) + (-3)(-2), 2(5) + (-3)(1)) = (1, 7)$$

→ Soma vetorial
→ Multiplicação vetorial

→ juntos: Combinação linear.

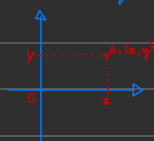
A combinação pode ser feita com n pares de $\mathbb{R}^2$. Dados os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$

e n pares de números reais (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$, temos:

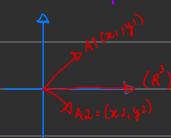
$$\begin{aligned} a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2) + \dots + a_n(x_n, y_n) &= \\ \sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_jx_j, \sum_{k=1}^n a_ky_k \right) \end{aligned}$$

Representação Geométrica do $\mathbb{R}^2$

o par $A = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

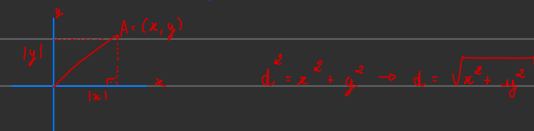


Representação em flechas



Normas no $\mathbb{R}^2$

$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é denominada norma (ou módulo) de (x, y) .



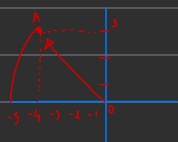
Se $\|(x, y)\| = 1$ diz-se que o par (x, y) é unitário

obs: para o ponto $(x, 0)$, ou seja, $y=0$, temos $\|(x, 0)\| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

Exemplo: $A = (4, 3)$

Qual sua distância do ponto até a origem?

obs: os pontos do $\mathbb{R}^2$, cuja distância até a origem é 5 formam a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 5.



$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

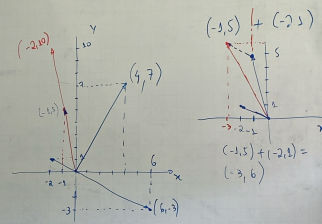
Combinação linear: é uma operação que é feita numa mistura de adição e com a multiplicação por escalon.

Dados os números reais a e b , a operação a seguir é uma combinação linear.

$$a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

exemplo:

$$2(-1, 5) - 3(-2, 1) = (2(-1) + (-3)(-2), 2(5) + (-3)(1)) = (1, 7)$$



Análises:

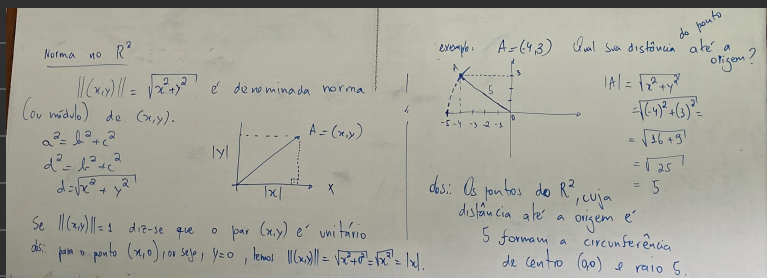
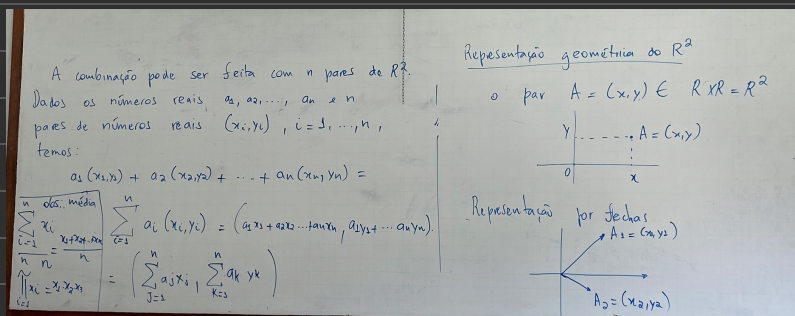
$$\begin{aligned} d_1 &= a^2 + b^2 \\ d &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Média E. M

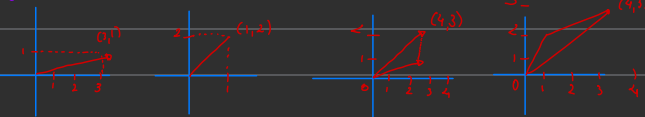
$$\sum_{i=1}^n x_i \quad \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)$$

Progressão

$$x_i = x_1 + (i-1)d$$



Geometria da adição de $\mathbb{R}^2$



$(3,1) + (1,2) = (4,3)$

$(1,2) + (3,1) = (4,3)$

Distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^2$

ex: $A = (7, -2)$ e $B = (3, 1)$

$B - A = (-4, 3)$

Anotações: Regra do paralelogramo

Aula 09.11

Equações da circunferência

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$

ex: $O = (0,0)$ raio 5, então $x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow 25$

Circunferência de centro (a,b) e raio r é o conjunto

$\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$

ex: circunferência de centro $(3,4)$, raio 5, tem a equação

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Operações vetoriais

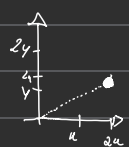
$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (b^2 + a^2 - r^2) = 0$

$6x = -2ax \mid -2by = 2y \rightarrow (-3)^2 + (-1)^2 - r^2 = 1$
 $-2a = 6 \mid b = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow r^2 = 1 + 1 = 2$
 $a = \frac{6}{2} = 3 \mid r = \sqrt{2} \rightarrow 2$

Multiplicações por escalar

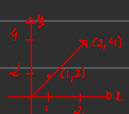
$a(x,y) = (ax, ay)$



Exemplo
 $(x,y) = (1,2)$
 $2(1,2) = (2,4)$

$a=1 \rightarrow 1(x,y) = x,y$

$a=2 \rightarrow 2(x,y) = 2x, 2y$



05/11/23
Equação da circunferência
 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$
ex: $O = (0,0)$ raio 5, então $x^2 + y^2 = 5^2$
 $x^2 + y^2 = 25$
• Circunferência de centro (a,b) e raio r é o conjunto
 $\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$
ex: circunferência de centro $(3,4)$ e raio 5
tem a equação $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$
 $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$
 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$
 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $\| (x,y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\| (3,4) \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

05/11/23
Multiplicação por escalar
 $a(x,y) = (ax, ay)$
ex: $(x,y) = (1,2)$
 $2(1,2) = (2,4)$
 $a=0$ então $(0,0)$
 $a=1$
 $1(x,y) = x,y$
 $0=2 \Rightarrow 2(x,y) = (2x, 2y)$

ex: $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$
 $6x = -2ax \mid -2by = 2y$
 $-2a = 6 \mid b = \frac{2}{-2} = -1$
 $a = \frac{6}{2} = 3 \mid r = \sqrt{2} \rightarrow 2$
 $(-1)^2 + (-3)^2 - r^2 = 1$
 $1 + 9 - r^2 = 1$
 $10 - r^2 = 1$
 $r^2 = 9$
 $r = 3$

Equação da reta

Seja $d = (x_1, y_1)$ um dado vetor não nulo, que será denominado de direção da reta ou simplesmente direção. A reta que passa pela origem e tem direção d é escrita

$$X = (x, y) = t \cdot d = t(x_1, y_1) \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

ou seja: $(x, y) = (tx_1, ty_1), t \in \mathbb{R}$
ou $\begin{cases} x = tx_1 \\ y = ty_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exemplo: equação paramétrica com direção $d = (1, 2)$
 $(x, y) = t(1, 2) = (t, 2t) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Equação paramétrica da reta que contém o ponto (x_2, y_2) e tem direção $d = (x_1, y_1)$

$$\begin{cases} x = tx_1 + x_2 \\ y = ty_1 + y_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

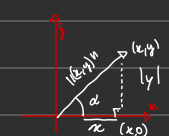
exemplo $d = (3, 2)$ e ponto $A = (1, -1)$
 $\begin{cases} x = t(3) + 1 \\ y = t(2) - 1 \end{cases}$

$t = 0 \Rightarrow (1, -1)$
 $t = 1 \Rightarrow (4, 1)$
 $t = 2 \Rightarrow (7, 3)$

Ângulo no $\mathbb{R}^2$

Considere o par (x, y) e seja α o ângulo formado entre a flecha em questão e o eixo X.

Algumas relações trigonométricas podem ser obtidas a partir do triângulo retângulo que tem os vértices $(x, y), (x, 0)$



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{hip}} \Rightarrow \frac{y}{||x, y||} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

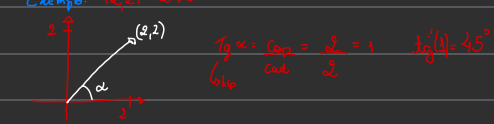
$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat. ad.}}{\text{hip}} \Rightarrow \frac{x}{||x, y||} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(x, y) = (\text{Cos } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Sen } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\Rightarrow (x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} (\text{Cos } \alpha, \text{Sen } \alpha)$$

$$(0 \leq \alpha < 2\pi)$$

Exemplo: $(2, 2) = 2\sqrt{2} (\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



Equação da reta

Seja $d = (x_1, y_1)$ um dado vetor não nulo, que será denominado de direção da reta ou simplesmente direção. A reta que passa pela origem e tem direção d é descrita:

$$X = (x, y) = t \cdot d = t(x_1, y_1) \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

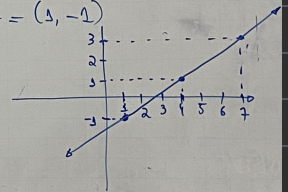
ou seja, $(x, y) = (tx_1, ty_1), t \in \mathbb{R}$
ou $\begin{cases} x = tx_1 \\ y = ty_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
ex: equação paramétrica com direção $d = (1, 2)$
 $(x, y) = t(1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

03/11/23

Equações paramétricas da reta que contém o ponto (x_2, y_2) e tem direção $d = (x_1, y_1)$:

$$\begin{cases} x = tx_1 + x_2 \\ y = ty_1 + y_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

exemplo: $d = (3, 2)$ e ponto $A = (1, -1)$
 $\begin{cases} x = t(3) + 1 \\ y = t(2) - 1 \end{cases}$
 $t = 0 \Rightarrow (1, -1)$
 $t = 1 \Rightarrow (4, 1)$
 $t = 2 \Rightarrow (7, 3)$



Anotações

Ver círculo trigonométrico.

5/11/23

Ângulos no $\mathbb{R}^2$

Considere o par (x, y) e seja α o ângulo formado entre a flecha em questão e o eixo X. Algumas relações trigonométricas podem ser obtidas a partir do triângulo retângulo que tem os vértices $0, (x, 0)$ e (x, y) .



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{hip}} = \frac{y}{||x, y||} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow y = \text{Sen } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat. ad.}}{\text{hip}} = \frac{x}{||x, y||} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x = \text{Cos } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x, y) = (\text{Cos } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Sen } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} (\text{Cos } \alpha, \text{Sen } \alpha)$$

$$= ||(x, y)|| (\text{Cos } \alpha, \text{Sen } \alpha)$$

$$(0 \leq \alpha < 2\pi)$$

$$||(2, 2)|| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{hip}} = \frac{y}{||x, y||} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow y = \text{Sen } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat. ad.}}{\text{hip}} = \frac{x}{||x, y||} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x = \text{Cos } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x, y) = (\text{Cos } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Sen } \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} (\text{Cos } \alpha, \text{Sen } \alpha)$$

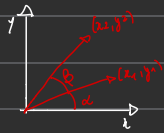
$$= ||(x, y)|| (\text{Cos } \alpha, \text{Sen } \alpha)$$

$$(0 \leq \alpha < 2\pi)$$

$$(2, 2) = 2\sqrt{2} (\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}})$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{Cat. ad.}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$$



14/11/23

Para analisar o ângulo β entre duas flechas, cria-se uma nova operação entre os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que transformam esses pares no número real $x_1 x_2 + y_1 y_2$. Essa operação é denominada de produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Para analisar o ângulo β entre duas flechas, cria-se uma nova operação entre os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que transformam esses pares no número real $x_1 x_2 + y_1 y_2$. Essa operação é denominada de produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$|x| = \cos \alpha \cdot \|(x_1, y_1)\|$
 $|y| = \sin \alpha \cdot \|(x_1, y_1)\|$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$
 $\cos \alpha_1 \cdot \|(x_1, y_1)\| \cdot \cos \alpha_2 \cdot \|(x_2, y_2)\| + \sin \alpha_1 \cdot \|(x_1, y_1)\| \cdot \sin \alpha_2 \cdot \|(x_2, y_2)\| =$
 $\|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) =$
 $\|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos \beta$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos \beta$

Para analisar o ângulo β entre duas flechas

cria-se uma nova operação entre os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

que transforma esses pares no número real $x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Essa representação é denominada de produto interno usual do $\mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\cos \alpha_1 \cdot \|(x_1, y_1)\| \cdot \cos \alpha_2 \cdot \|(x_2, y_2)\| + \sin \alpha_1 \cdot \|(x_1, y_1)\| \cdot \sin \alpha_2 \cdot \|(x_2, y_2)\| =$$

$$= \|(x_1, y_1)\| \cdot (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) =$$

$$= \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)$$

$$= \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| [\cos(\alpha_2 - \alpha_1)] = \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos \beta$$

$$\rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos \beta$$

então: $A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \beta$ em que β é o ângulo entre A e B

$$\text{ou ainda: } \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} = \cos \beta$$

exemplo: $A = (1, 1)$ e $B = (0, 1)$ encontram-se primeiramente as unidades na direção e sentido de A e B que são:

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$*A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \rightarrow \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ unidade}$$

$$*B = \text{unitária} \quad \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \beta$$

$$\text{ou seja: } \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ex: } (1, 2) \text{ e } (-2, 1)$$

$$\beta = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2(5)}{25} + \frac{2(5)}{25} \Rightarrow \beta$$

14/11/23

então: $A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \beta$ em que β é o ângulo entre A e B .

ou ainda: $\frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|} = \cos \beta$

Logo, $\cos \beta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|}$

ex: $A = (1, 1)$ e $B = (0, 1)$ encontra-se primeiramente os unitários na direção e sentido de A e B que são:

$\|(1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$*A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ unitário}$

$(1, 2) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$
 $(-2, 1) \Rightarrow \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$
 $= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{-2(5)}{25} + \frac{2(5)}{25} = \frac{-10}{25} + \frac{10}{25} = 0$

ou seja: $\frac{\sqrt{5}}{5} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

ex: $(1, 2)$ e $(-2, 1)$

$\beta = ?$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

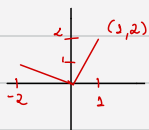
Círculo trigonométrico



16.11

Ângulo reto

Dois flechas são perpendiculares, se e somente se, o produto interno entre elas é nulo



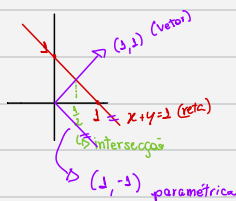
obs: é uma direção perpendicular à reta da equação cartesiana $ax+by=c$, denominada direção normal à reta.

ex: A flecha $(1,1)$ é perpendicular a reta $x+y=1$

$$y=1-x$$

$$x=0, y=1$$

$$x=1, y=0$$



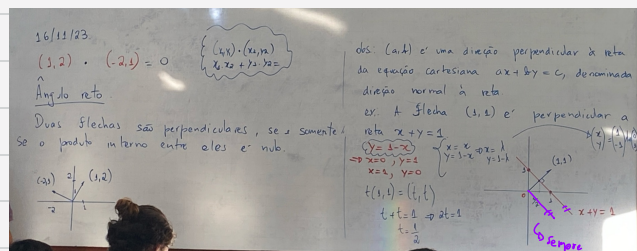
$$t(1,1) = (t, t)$$

$$t+t=1$$

$$2t=1$$

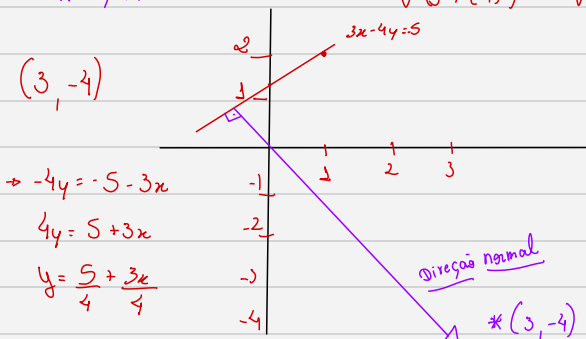
$$t=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x=x & x=\lambda \\ y=1-x & y=1-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



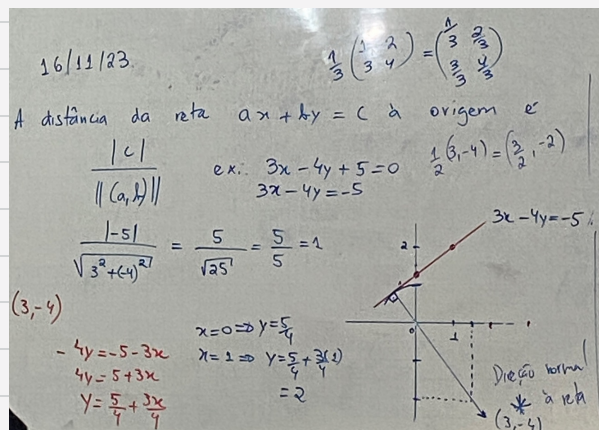
A distância da reta $ax+by=c$ à origem é

$$\frac{|c|}{\|(a,b)\|} \quad \text{ex: } 3x-4y+5=0 \quad \frac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$



$$x=0 \rightarrow y=\frac{5}{4}$$

$$x=1 \rightarrow y=\frac{5}{4}+\frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$



A distância entre as retas $ax+by=c$ e $ax+by=c'$ é

$$\frac{|c'-c|}{\|(a,b)\|}$$

$$\text{ex: } 3x-4y=8 \text{ e } 3x-4y=3=0$$

$$\frac{|8-3|}{5} = \frac{5}{5} = 1$$



→ São paralelas e distância é 1

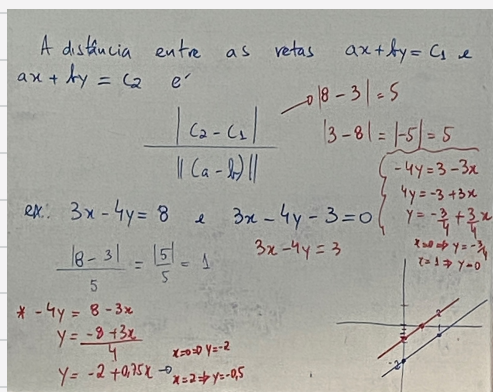
* paralelas: SI

* perpendiculares: SPI (sem pontos) SPD com pontos.

Parametrização:

$$-4y=8-3x$$

$$y=\frac{-8+3x}{4} \rightarrow y=-2+0,75x$$



A distância do ponto $A = (x_0, y_0)$ a reta da equação $ax + by = c$ é

$$\frac{|c - (ax_0 + by_0)|}{\|(a, b)\|}$$

ex: $A = (3, 2)$

$x - y = 5$

reta $x - y = 3$

$$\frac{3 - 5}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

* $d(x_0) + (-1)(y_0)$

$d(3) + (-1)(-2)$

$3 + 2 = 5$

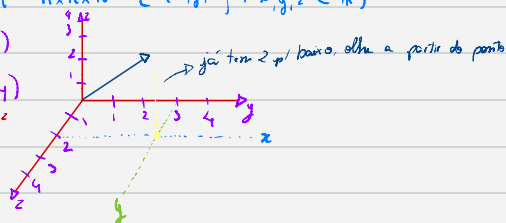
Aula 23.11

Vetores no $\mathbb{R}^3$

o conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$v = (x, y, z)$

$v = (2, 3, 4)$



A origem do sistema $O(0,0,0)$ - vetor nulo

Vetor oposto $v = (x, y, z) \Rightarrow -v = (-x, -y, -z)$

1) Dado $\mu = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$.

2) 1) Dois vetores $\mu = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, define-se:

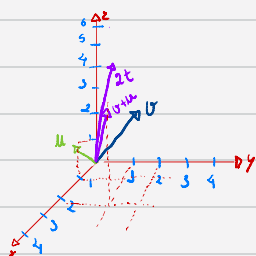
$\mu + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$a\mu = (ax_1, ay_1, az_1)$

$t = v + \mu = (1, 2, 3)$

$a = 2$

$at = 2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$



16/11/23

A distância do ponto $A = (x_0, y_0)$ a reta da equação $ax + by = c$ é

$$\frac{|c - (ax_0 + by_0)|}{\|(a, b)\|}$$

ex: $A = (3, 2)$

reta $x - y = 3$

* $d(x_0) + (-1)(y_0)$

$d(3) + (-1)(-2) = 3 + 2 = 5$

$|x - y = 5|$

$$\frac{|3 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

3) $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos quaisquer no espaço, então:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$ex: A = (3, 3, 1)$$

$$B = (2, 3, 4)$$

$$\vec{AB} = (2-3, 3-3, 4-1)$$

$$= (-1, 0, 3)$$

Gráfico: n precisa fechar

IV) O produto escalar (interno) dos vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é o número real $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ $(3, 2, 3) \quad (3, 2, 1)$

$$u \cdot v = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

V) O módulo do vetor $v = (x, y, z)$ é dado $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $(3, 2, 3) \Rightarrow \|v\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$

VI) Se u e v são vetores não nulos e θ é o ângulo formado por eles $\cos \theta = \frac{|u| \cdot |v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$

VII) Para $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, tem-se:

a) $u \parallel v$ Se, e somente se $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

b) $u \perp v$ Se, e somente se: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{1}$$

ex: $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{0} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{0}{1}$ n é paralelo //

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ n é perpendicular

ex: $(1, 2, 3)$ $(2, 4, 6)$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow \text{são paralelos}$$

Esfera de raio a e centro O

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Distância entre dois pontos

$$\|B-A\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

$A = (1, -1, \sqrt{7})$ $B = (-1, 1, \sqrt{7})$

$$= (-1-1)^2 + (-1-(-1))^2 + (\sqrt{7}-\sqrt{7})^2$$

$$4 + 4 + (-2\sqrt{7})^2$$

$$8 + 4 \cdot 7$$

$$8 + 28 = \sqrt{36} = 6$$

Equação da Esfera

Equação da Esfera

$$\{(x, y, z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$

Centro (a, b, c) , $r=4$

$$(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$$

$$(x^2 - 2x + 3) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$$

Retas no $\mathbb{R}^3$

Seja $d = (x_1, y_1, z_1)$ um dado vetor não nulo, direção da reta, a reta que passa pela origem e tem direção de d é descrita o conjunto dos pontos no $\mathbb{R}^3$

$$X = (x, y, z) = t d = t(x_1, y_1, z_1) \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x, y, z) = (tx_1, ty_1, tz_1) \quad t \in \mathbb{R}$$

Forma orbital da equação da reta

$$x = t d + A, \quad t \in \mathbb{R}$$

equações paramétricas da reta no $\mathbb{R}^3$ que contém o ponto $A = (x_2, y_2, z_2)$ e tem direção $d = (x_1, y_1, z_1)$

$$x = tx_1 + x_2$$

$$y = ty_1 + y_2$$

$$z = tz_1 + z_2$$

exemplo: equações da reta r paralela a $d = (1, 0, -1)$

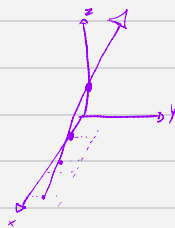
e que contém o ponto $A = (3, 2, 1)$

obs: Duas retas são paralelas se tem a mesma direção

exemplos: $d = (1, 0, -1)$ e contém $A = (3, 2, 1)$

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \cdot 0 + 2 \\ z = t(-1) + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = 0 \rightarrow (3, 2, 1)$
 $\Rightarrow t = 3 \rightarrow (4, 2, 0)$
 $\Rightarrow t = 2 \rightarrow (5, 2, -1)$
 $\Rightarrow t = -1 \rightarrow (2, 2, 2)$



Equações Paramétricas de um plano:

ex: Dados os pares $(1, 0)$ e $(0, 1)$ do $\mathbb{R}^2$ observe que qualquer ponto (x, y) do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$(x, y) = (1, 2) + (2, -1)$$

$$(x, y) = a(1, 2) + b(2, -1)$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 2, \quad a \cdot 2 + b \cdot (-1) = (x, y)$$

Quaisquer que sejam os dois pares dados, se eles não forem nem nulos nem múltiplos um do outro

a combinação linear deles irá descrever todo plano $\mathbb{R}^2$. Do mesmo modo no $\mathbb{R}^3$.

$$d_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } d_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{Combinação Linear: } z = (x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + s(x_2, y_2, z_2)$$

$$t(t_1 + s_1, t_2 + s_2, t_3 + s_3)$$

com $t, s \in \mathbb{R}$ descreve um plano no $\mathbb{R}^3$

$$\text{exemplo } (1, 1, 1) \text{ e } (3, 2, 1)$$

$$\begin{cases} x = t_1 + s_3 \\ y = t_1 + s(2) \\ z = t_1 + s_1 \end{cases}$$

Espaço Vetorial - 12.12 e 14.12

+ exemplos

Considere um conjunto V , não vazio, no qual é possível definir as operações

- Adição $+$: $V \times V \rightarrow V$.
- Multiplicação por escalar $R \times V \rightarrow V$

De modo que essas operações tenham as seguintes propriedades:

1. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$
3. existe um elemento nulo em V , isto é, $\exists \bar{0} \in V$, tal que para todo $u \in V$ tem-se que $\bar{0} + u = u$
4. Todos os elementos de V tem inverso. Isto é, $\forall u \in V$ existe um elemento de V denominado $-u$, $u + (-u) = \bar{0}$
5. $a(u + v) = au + av$, $\forall u, v \in V$ e $\forall a \in R$
6. $(a + b)u = au + bu$, $\forall u \in V$ e $\forall a, b \in R$
7. $(ab)u = a(bu)$, $\forall u \in V$ e $\forall a, b \in R$
8. $1u = u$ $\forall u \in V$

Subespaço Vetorial

Um espaço vetorial S de um espaço vetorial V é um subconjunto, não vazio, $S \subseteq V$ com as seguintes propriedades:

- i) Se $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$.
- ii) Se $v \in S$ e $a \in R \Rightarrow a \cdot v \in S$.

Obs: Quando a operação de adição é realizada no espaço V torna-se dois vetores de V e ao somar obtém-se um vetor de V . Da mesma forma, quando a operação é feita em S , deve-se tomar dois elementos de S e ao somar o resultado deve ser um elemento de S . Isto é denominado "Fechamento em relação à operação soma!"

Do mesmo modo, ao multiplicar um vetor de S por um escalar essa operação deve resultar em um vetor de S . "Fechamento em relação a multiplicação por um escalar"

Exemplo 1: O subconjunto $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ é um subconjunto vetorial de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{i) } u + v &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= (x_1, 0) + (y_1, 0) \\ &= (x_1 + y_1 + 0 + 0) = (x_3, 0) \end{aligned} \quad \text{ii) } a \cdot v \in S? \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2) = (ax_1, a \cdot 0) = (ax_1, 0)$$

Exemplo 2: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ $\bar{0} = (0, 0) \in S$

$$\text{i) } u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3), \text{ pois } x_3 \text{ e } y_3 \geq 0$$

$$\text{ii) } a \cdot u = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

para $a = -1$ temos: $(-x_1, -x_2) \notin S$ (não é subespaço vetorial)

Exemplo 3: $x \geq 0$ e $y = 0$

$(x_1, 0)$ é subespaço vetorial

Exemple 4: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=0\}$ $x=-2y$

$(0,0) \in S$, pois, $0+2(0)=0$

$$i) u+v = (-2y_1, y_1) + (-2y_2, y_2) = (-2y_1 - 2y_2, y_1 + y_2) = (-2(y_1 + y_2), y_1 + y_2) = (-2y_3, y_3)$$

$$ii) a \cdot u = a(-2y_1, y_1) = (-2ay_1, ay_1) = (a(-2)y_1, ay_1)$$

Exemple 5: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x-2y=6\}$ Do $\mathbb{R}^2$

$$(0,0) \notin S$$

$$u = (2,0)$$

$$a=2 \Rightarrow 2(2,0) = (4,0)$$