



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

Campus
Bom Jesus do Itabapoana

Lógica para computadores

Introdução á Lógica

Professora Ana Mara de Oliveira Figueiredo
ana.figueiredo@iff.edu.br

Lógica

- linguagem natural
- linguagem formal: objetos matemáticos, cujas regras de formação são precisamente definidas e às quais pode atribuir sentido único, sem ambiguidade.



Frases ambíguas

Carlos pediu a José para assinar o contrato.
É proibido entrar na loja de bonés.
A médica falou com a paciente parada na enfermaria.
Papa abençoa fiéis do hospital.
Ele estava em minha companhia.
Junior encontrou a namorada em seu carro.
A cachorra da minha vizinha é linda.
O cadáver foi encontrado perto do banco.
A avó encontrou o neto no seu quarto.
Abandonei meu irmão contrariado.
O homem viu o incêndio do prédio ao lado.
O policial deteve o ladrão em sua casa.
O garotinho viu o mendigo sentado na varanda.

lingua Portuguesa - Facebook

Como surgiu?

O desenvolvimento da lógica teve início em torno de 350 a.C. com Aristóteles, e a partir de então evoluiu ao longo de séculos de existência, graças aos esforços de matemáticos como Leibniz, Euler, De Morgan, Boole, Russell, dentre inúmeros outros. Porém, foi apenas no século XX, com o surgimento dos circuitos digitais, que as primeiras aplicações práticas começaram a aparecer.

Ao final do século XIX e início do século XX, com avanços na lógica e na matemática, os paradoxos passaram a ser divididos em duas classes principais: sintáticos (ou lógicos) e semânticos. Em poucas palavras, um paradoxo é chamado sintático se pode ser descrito utilizando a linguagem formal da lógica de primeira ordem. Já os paradoxos semânticos não podem ser descritos utilizando uma linguagem formal.

Outro aspecto que deve ser mencionado é a existência de uma infinidade de tipos de lógica, dentre as quais podemos citar a clássica, modal, paraconsistente, multivalorada, intucionista, fuzzy etc. O estudo que nos interessa mais diretamente é a lógica proposicional como fundamentação básica para a lógica de predicados.

A importância do cálculo proposicional para a computação é o fato de este servir de base para a solução de diversos problemas do mundo real, particularmente daqueles que podem ser modelados por sistemas dicotômicos, ou seja, situações em que as variáveis envolvidas apresentam apenas dois estados bem definidos (e em geral, opostos) como 0 ou 1, verdadeiro ou falso, sim ou não, preto ou branco, entre outras.

Linguagem proposicional

Linguagens formais podem ter diversos níveis de expressividade, quanto maior esse nível, mais complexa será a manipulação da linguagem.

Linguagem proposicional: complexidade limitada, mas já possibilita expressar algumas relações lógicas.

Uma proposição é uma expressão à qual podemos atribuir um valor verdade (verdadeiro ou falso).

Exclui sentenças auto-referentes.

Operações simples: conjunção; disjunção; implicação e negação

Não permite relação de conjunto

O alfabeto da lógica proposicional

- símbolos de pontuação: (e)
- símbolos de verdade: V e F
- símbolos proposicionais atômicos (representados por letras minúsculas): p, q, r, s etc.
- conectivos ou operadores lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

Proposições

Uma proposição é definida como um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

- $\text{tg } \pi/4 = 1$
- $\sqrt{3} < \pi$
- o Brasil situa-se na América do Sul

Dizemos que uma proposição tem valor lógico verdade (V) se ela é verdadeira; analogamente, ela tem valor lógico falsidade (F) se ela é falsa.

Considere as seguintes proposições:

1. p : a Argentina fica na África
2. q : o Brasil situa-se no hemisfério Sul

O valor lógico da primeira proposição é F, enquanto o da segunda proposição é V, ou seja, $V(p) = F$ e $V(q) = V$.

Proposições podem ser classificadas como simples ou compostas.

Uma proposição é dita simples (ou atômica) se não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Proposições simples são geralmente representadas por letras minúsculas.

Alguns exemplos de proposições simples são:

- p : Carlos é careca
- q : Paula é estudante
- r : o número 36 é um quadrado perfeito

Uma proposição é dita composta (fórmula proposicional) se é formada por duas ou mais proposições.

Representaremos proposições compostas por letras maiúsculas.

A seguir, temos alguns exemplos de proposições compostas:

- P: Carlos é careca e Paula é estudante
- Q: Rafael dirige carros ou motos
- R: se um jogador de futebol recebe 2 cartões amarelos em um jogo, então deve ser expulso.

Princípios fundamentais da lógica matemática

- Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um desses dois casos, mas nunca um terceiro.

De acordo com esses princípios, podemos afirmar que toda proposição admite um e somente um dos valores V ou F

Tabela-verdade

Definição 1.1: o valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Por exemplo, no caso de uma proposição composta cujas variáveis envolvidas (átomos) são p e q , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p e q são: VV, VF, FV e FF, conforme indica a tabela a seguir.

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

No caso de uma proposição composta cujos átomos componentes são p , q e r , as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p , q e r são dadas pela seguinte tabela-verdade:

Teorema: o número de linhas de uma tabela-verdade referente a uma proposição p é dado por 2^n , no qual n é o número de átomos que compõem p .

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Operações Lógicas sobre proposições

Negação

Chamamos de negação de uma proposição p a proposição denotada por “não p ”, que resulta em valor lógico V quando p é falsa e F quando p é verdadeira, de modo que “não p ” tem o valor lógico oposto daquele de p . A negação de p é denotada por $\neg p$ (ou alternativamente $\sim p$), sendo lida como: “não p ”. O valor lógico da operação de negação de uma proposição p é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Operações Lógicas sobre proposições

Note que $\neg$ é um operador unário pois atua sobre uma única proposição simples.

Exemplos:

- p : a Terra é um planeta do sistema solar

$\neg p$: a Terra não é um planeta do sistema solar

$V(p) = \neg(V(\neg p))$, ou seja, $V = \neg F$

- q : $1 + 1 = 2$

$\neg q$: $1 + 1 \neq 2$

$V(q) = \neg(V(\neg q))$, ou seja, $V = \neg F$

Operações Lógicas sobre proposições

Conjunção

Chamamos de conjunção de duas proposições p e q a proposição resultante da operação $p \wedge q$, cujo valor lógico é V quando ambas as proposições são verdadeiras e F em todos os outros casos. A expressão $p \wedge q$ é lida como “p e q”. A tabela-verdade para o operador binário conjunção (note que $\wedge$ atua sobre dois argumentos) é dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operações Lógicas sobre proposições

Conjunção

Exemplos:

• r : Pelé nasceu na China

s : Pelé foi um jogador de futebol

$r \wedge s$: Pelé nasceu na China e foi um jogador de futebol

$$V(r \wedge s) = V(r) \wedge V(s) = F \wedge V = F$$

• r : o Brasil venceu a Copa do Mundo de 2002

s : o Brasil venceu a Copa do Mundo de 2010

$r \wedge s$: o Brasil venceu as Copas do Mundo de 2002 e 2010

$$V(r \wedge s) = V(r) \wedge V(s) = V \wedge F = F$$

• p : São Paulo é um estado do Brasil

q : o Brasil é um país que pertence ao continente americano

$p \wedge q$: São Paulo é um estado do Brasil, um país que pertence ao continente americano

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$$

Operações Lógicas sobre proposições

Disjunção

Chamamos de disjunção de duas proposições p e q a proposição resultante da operação $p \vee q$, cujo valor lógico é V quando uma das proposições é verdadeira e F apenas quando ambas são falsas. A expressão $p \vee q$ é lida como “ p ou q ”. A tabela-verdade para o operador binário disjunção (note que $\vee$ atua sobre dois argumentos) é dada por:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operações Lógicas sobre proposições

Exemplos:

• p : Temer foi presidente do Brasil

q : Temer nasceu na Rússia

$p \vee q$: Temer foi presidente do Brasil ou nasceu na Rússia

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$$

• r : Albert Einstein foi um bombeiro

s : Albert Einstein nasceu no Brasil

$r \vee s$: Albert Einstein foi bombeiro ou nasceu no Brasil

$$V(r \vee s) = V(r) \vee V(s) = F \vee F = F$$

• r : um carro flex é movido a etanol

s : um carro flex é movido à gasolina

$r \vee s$: um carro flex é movido a etanol ou à gasolina

$$V(r \vee s) = V(r) \vee V(s) = V \vee V = V$$

Atividade escrita à mão 0,5pts

1. Faça a tabela verdade das seguintes operações: negação; disjunção e conjunção.
2. Para cada uma das operações, crie no mínimo 3 exemplos, como no slide.
3. Dadas as afirmações: P: Hoje é segunda-feira. Q: A aula de matemática está marcada. Escreva as seguintes expressões em linguagem com operadores lógicos:
 - a) A aula de matemática não está marcada.
 - b) Hoje não é segunda-feira e a aula de matemática está marcada.
 - c) A aula de matemática está marcada ou hoje é segunda-feira.
4. Considere as afirmações: R: O sol está brilhando. S: Está chovendo. Traduza as seguintes expressões para a forma de lógica matemática:
 - a) Não está chovendo.
 - b) Está chovendo e o sol não está brilhando.
 - c) Está chovendo ou o sol está brilhando.
5. Dadas as afirmações: A: O número é par. B: O número é maior que 10. Escreva as seguintes expressões em linguagem lógica:
 - a) O número não é par.
 - b) O número é par e maior que 10.
 - c) O número não é par ou é maior que 10.
6. Considere as afirmações: X: O software está atualizado. Y: O backup foi realizado. Escreva as seguintes expressões em linguagem lógica:
 - a) O software não está atualizado.
 - b) O software está atualizado e o backup foi realizado.
 - c) O software não está atualizado ou o backup foi realizado.

Lembre-se de que "P" e "Q" representam afirmações ou proposições verdadeiras, enquanto "¬" representa a negação, "∧" representa a conjunção (E lógico) e "∨" representa a disjunção (OU lógico). Resolva esses exercícios aplicando as regras da lógica matemática para combinar as afirmações de acordo com os operadores dados.

Operações Lógicas sobre proposições

Disjunção exclusiva

Chamamos de disjunção exclusiva de duas proposições p e q a proposição resultante da operação $p \vee\text{--} q$, cujo valor lógico é V somente quando $V(p) \neq V(q)$ e F quando $V(p) = V(q)$, ou seja, quando são ambas falsas ou ambas verdadeiras. A expressão $p \vee\text{--} q$ é lida como “ p ou q , mas não ambas”, “ p ou exclusivo q ”, ou ainda “ou p , ou q ”

p	q	$p \vee\text{--} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Em algumas proposições compostas, somente uma de suas componentes pode ser verdadeira, pois são mutuamente exclusivas. Por exemplo, se alguém nasce em um estado, não pode ter nascido em outro.

- p : Antônio é paulista (V) q : Antônio é mineiro

$p \vee q$: ou Antônio é paulista ou é mineiro

$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$

- r : o Rio de Janeiro fica na região Sudeste s : Pernambuco fica na região Nordeste

$r \vee s$: ou o Rio de Janeiro fica no Sudeste ou Pernambuco fica no Nordeste

$V(r \vee s) = V(r) \vee V(s) = V \vee V = V$

Operações Lógicas sobre proposições

Condicional

Chamamos de condicional toda proposição que é definida da forma “se p , então q ”, representada por $p \rightarrow q$, e cujo valor lógico é F somente quando p é verdadeira e q é falsa. A expressão $p \rightarrow q$ é lida como “ p implica q ” ou simplesmente “se p , então q ”, de modo que seu resultado é F somente quando uma proposição verdadeira implica em falsidade. O oposto, ou seja, uma proposição falsa implicando em verdade, resulta em V, o que significa que $p \rightarrow q$ é sempre V quando p é falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p : Carlos mora em Fortaleza q : Carlos mora no Ceará

$p \rightarrow q$: se Carlos mora em Fortaleza, então ele mora no Ceará

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$$

r : Minas Gerais está localizado na região Sudeste do Brasil s : Alagoas está localizado na região Sul do Brasil

$r \rightarrow s$: se Minas Gerais está localizado na região Sudeste, então Alagoas localiza-se na região Sul

$$V(r \rightarrow s) = V(r) \rightarrow V(s) = V \rightarrow F = F$$

w : Alagoas está localizado na região Sul do Brasil u : Minas Gerais está localizado na região Norte do Brasil

$w \rightarrow u$: se Alagoas está localizado na região Sul do Brasil, então Minas Gerais localiza-se na região Norte

$$V(w \rightarrow u) = V(w) \rightarrow V(u) = F \rightarrow F = V$$

Operações Lógicas sobre proposições

Bicondicional

Chamamos de bicondicional toda proposição que é definida da forma “p, se e somente se q”, representada por $p \leftrightarrow q$, e cujo valor lógico é V quando $V(p) = V(q)$ e F quando $V(p) \neq V(q)$. Em outras palavras, o operador bicondicional nada mais é que a dupla aplicação do operador condicional, ou seja, o resultado de uma bicondicional é V apenas quando $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p : um triângulo tem 3 lados q : um quadrado tem 4 lados

$p \leftrightarrow q$: um triângulo tem 3 lados se e somente se um quadrado tem 4 lados

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$$

r : Carolina é paulista (V) s : Carolina nasceu no Rio de Janeiro

$r \leftrightarrow s$: Carolina é paulista se e somente se nasceu no Rio de Janeiro

$$V(r \leftrightarrow s) = V(r) \leftrightarrow V(s) = V \leftrightarrow F = F$$

w : uma hora tem 10 minutos u : um dia tem 40 horas

$w \leftrightarrow u$: uma hora tem 10 minutos se e somente se um dia tem 40 horas

$$V(w \leftrightarrow u) = V(w) \leftrightarrow V(u) = F \leftrightarrow F = V$$

Precedência dos operadores

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
4	3	2	1	0



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Bom Jesus do Itabapoana

A proposição $p \wedge q \vee r$ deve ser entendida como $(p \wedge q) \vee r$.

$p \rightarrow q \vee r$ deve ser entendida como $p \rightarrow (q \vee r)$.

$p \rightarrow q \rightarrow r$, que pode ser entendida tanto como $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ quanto $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, dependendo da parentização adotada.

WFF (Well-Formed Formula)

Dizemos que uma proposição composta por outras proposições é uma fórmula bem-formada, ou WFF (Well-Formed Formula) se ela define uma sentença lógica válida (é uma sentença válida dentro da gramática da lógica proposicional).

Uma WFF é definida recursivamente como:

- os símbolos V e F são WFFs
- um átomo é uma WFF
- se p é uma WFF, $\neg p$ também é uma WFF
- se p e q são duas WFFs, $p * q$, onde $*$ representa qualquer um dos operadores binários vistos anteriormente, também é uma WFF

Como exemplos de fórmulas bem-formadas, podemos citar as expressões

$p \rightarrow (q \wedge r)$, $\neg q \wedge ((\neg r \wedge s) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q))$ e $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg p$.

Cláusula

Um tipo de fórmula bem-formada de particular interesse são as cláusulas, muito utilizadas no estudo de formas normais e na programação de computadores em linguagem Prolog.

Uma cláusula nada mais é que uma disjunção de proposições atômicas (ou sua negação), ou seja, é uma expressão da forma:

$$C = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$$

onde L_i , $i = 1, \dots, n$ é um átomo qualquer (i.e., α) ou sua negação (i.e., $\neg\alpha$). Por exemplo, as expressões $(p \vee \neg q \vee r)$ e $(\neg r \vee q)$ são cláusulas.