



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

Campus
Bom Jesus do Itabapoana

Lógica para computadores

Consequência e equivalência lógica

Professora Ana Mara de Oliveira Figueiredo
ana.figueiredo@iff.edu.br

Consequências lógicas:

Definição 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$, dizemos que Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \dots, P_n$ se e somente se a seguinte regra sempre for válida: se $P_1, P_2, \dots, P_n$ forem todas simultaneamente verdadeiras, ou seja, $V(P_1) = V(P_2) = \dots = V(P_n) = V$, então, Q também é verdade, ou seja, $V(Q) = V$. Se Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \dots, P_n$, utilizaremos a seguinte notação: $P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$

Exemplo 1: verifique que $p \vee q$ é consequência lógica de p .

O primeiro passo consiste na construção das tabelas-verdade das proposições envolvidas, neste caso, p e $(p \vee q)$.

O próximo passo consiste em observar as colunas de p e $p \vee q$. Note que $p \vee q$ tem valor lógico V sempre que p é verdade, o que significa que podemos escrever $p \models p \vee q$, ou seja, $p \vee q$ é consequência lógica de p .

Note, entretanto, que não podemos dizer que p é consequência lógica de $p \vee q$, uma vez que, como indica a terceira linha da tabela acima, existe uma situação em que $p \vee q$ assume valor lógico V e p assume valor lógico F.

p	q	$p \vee q$	
V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	V	$\Leftarrow$
F	V	V	
F	F	F	

Exemplo 2: considere as proposições

$P = p \rightarrow q$, $Q = r \rightarrow s$ e $R = (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$.

Verifique se R é consequência lógica de P, Q .

p	q	r	s	$(p \rightarrow q)$	$(r \rightarrow s)$	$(p \vee r)$	$(q \vee s)$	$(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$	
V	V	V	V	V	V	V	V	V	←←
V	V	V	F	V	F	V	V	V	
V	V	F	V	V	V	V	V	V	←←
V	V	F	F	V	V	V	V	V	←←
V	F	V	V	F	V	V	V	V	
V	F	V	F	F	F	V	F	F	
V	F	F	V	F	V	V	V	V	
V	F	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	V	V	V	V	←←
F	V	V	F	V	F	V	V	V	
F	V	F	V	V	V	F	V	V	←←
F	V	F	F	V	V	F	V	V	←←
F	F	V	V	V	V	V	V	V	←←
F	F	V	F	V	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	V	F	V	V	←←
F	F	F	F	V	V	F	F	V	←←

Observando a tabela podemos perceber a seguinte situação: sempre que P e Q são simultaneamente verdadeiras, isto é, $V(P) = V(Q) = V$ (o que ocorre nas linhas destacadas), R assume apenas valores lógicos V . Em outras palavras, isso significa que R é consequência lógica de P e Q , ou seja, $P, Q \models R$

Consequências lógicas:

O resultado que veremos a seguir fornece uma outra alternativa para verificar se uma proposição é consequência lógica de um dado conjunto de proposições. Ele relaciona os conceitos de tautologia e consequência lógica.

Teorema 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \dots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ for uma tautologia.

$P = (p \rightarrow q)$, $Q = (q \rightarrow r)$ e $R = (p \rightarrow r)$.
 Verifique se $P, Q \models R$.

Utilizando o resultado do Teorema 3.1, podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = (P \wedge Q) \rightarrow R$, ou ainda, $S = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia. Para isso, procedemos com a construção da respectiva tabela-verdade.

R é consequência lógica de P e Q , ou seja, $P, Q \models R$.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Consequências lógicas:

Teorema 3.2: dadas as proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \dots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Q)$ for uma contradição.

Utilizando o resultado do Teorema 3.2, podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = P \wedge Q \wedge \neg R$, ou ainda, $S = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge \neg(p \rightarrow r)$ é uma contradição.

Consequências lógicas:

Observando a tabela-verdade, fica provado que $S = P \wedge Q \wedge \neg R$ é uma contradição, o que automaticamente mostra que $P, Q \models R$, ou seja, que R é consequência lógica de P e Q .

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	$\neg(p \rightarrow r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Equivalências lógicas:

Definição 3.2: dizemos que uma proposição P é logicamente equivalente a uma proposição Q , o que é representado como $P \equiv Q$, se e somente se P for consequência lógica de Q e Q for consequência lógica de P , ou seja, se e somente se $P \models Q$ e $Q \models P$.

Considerando o Teorema 3.1, $P \models Q$ se e somente se $P \rightarrow Q$ for uma tautologia, e $Q \models P$ se e somente se $Q \rightarrow P$ for uma tautologia. Portanto, duas proposições P e Q são equivalentes, isto é, $P \equiv Q$, se e somente se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia. Isso equivale a dizer que duas proposições são logicamente equivalentes se e somente se suas tabelas-verdade forem idênticas.

Exemplo 5: mostre que $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Para verificar que $(p \rightarrow q)$ é logicamente equivalente à $(\neg p \vee q)$, basta verificar que a proposição $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia, o que em essência é o mesmo que verificar se as tabelas-verdade de $(p \rightarrow q)$ e $(\neg p \vee q)$ são iguais.

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Equivalências lógicas:

A partir da tabela-verdade a equivalência lógica fica evidenciada, uma vez que a proposição composta $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

Essa equivalência significa que temos uma identidade, ou seja, em qualquer método de dedução, prova ou inferência podemos substituir uma fórmula pela outra, da mesma forma que na matemática podemos substituir a tangente de um ângulo pela razão entre o seno e o cosseno daquele ângulo.

Isso nos permite intercambiar de $(p \rightarrow q)$ para $(\neg p \vee q)$ sempre que precisarmos. Essa é a importância de encontrar equivalências lógicas.

Exemplo 6: sendo $P = (p \vee q) \rightarrow r$
 e $Q = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$, mostre que $P \equiv Q$.

Como $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia,
 temos que

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \vee q)$	P	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Proposições associadas a condicionais

Dada uma proposição condicional da forma $p \rightarrow q$, podemos associar a ela outras três proposições condicionais envolvendo apenas os átomos p e q :

- a proposição recíproca $q \rightarrow p$
- a proposição contrária $\neg p \rightarrow \neg q$
- a proposição contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Propriedade 1: uma condicional e sua contrapositiva são equivalentes, ou seja, $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Propriedade 2: a recíproca e a contrária de uma condicional $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$.

Equivalências notáveis:

Dupla negação: $\neg(\neg p) \equiv p$

Leis idempotentes: $p \vee p \equiv p$ e $p \wedge p \equiv p$

Leis comutativas: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ e $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Leis associativas: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ e $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

Leis distributivas: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ e $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Regra da bicondicional: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$