



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

Campus
Bom Jesus do Itabapoana

Lógica para computadores

Algebra proposicional

Professora Ana Mara de Oliveira Figueiredo
ana.figueiredo@iff.edu.br

É possível manipular proposições lógicas com o intuito de simplificá-las ou mesmo reescrevê-las em uma outra representação equivalente, assim como acontece com expressões algébricas da matemática?

A resposta para essa pergunta é justamente o principal objetivo desta unidade, que irá discutir as principais propriedades dos operadores lógicos que estudamos anteriormente, bem como duas representações padrões para uma proposição, que são as formas normais conjuntiva (FNC) e disjuntiva (FND), importantes tanto na identificação quanto na comparação de duas ou mais fórmulas bem-formadas.

Com base nos conceitos que serão discutidos aqui, será possível, por exemplo, encontrar proposições logicamente equivalentes a uma dada proposição P , sem a utilização de tabelas-verdade.

A grande vantagem disso reside no fato de que, enquanto o número de proposições atômicas em P cresce linearmente (n), o número de linhas da tabela-verdade cresce exponencialmente (2^n), tornando inviável sua construção.

Propriedades dos operadores conjunção e disjunção

Um comentário relevante consiste no significado do termo dual em lógica proposicional.

Para qualquer proposição P definida apenas em termos de símbolos atômicos (p , q , . . .), símbolos de verdade (V ou F) e dos conectivos $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção), seu par dual (proposição dual a P) é encontrado substituindo todas as ocorrências dos símbolos V por F e vice-versa, bem como todo conectivo $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa. Por exemplo, o dual da proposição $(p \wedge q) \vee F$ é a proposição $(p \vee q) \wedge V$.

propriedades básicas dos operadores de conjunção e disjunção

Note que cada uma das leis indicadas na tabela estão acompanhadas do seu dual, mostrando que o que vale para o operador $\wedge$ também vale para $\vee$.

Leis	Nomes
$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$	Leis da identidade
$p \vee F \equiv p$	
$p \wedge F \equiv F$	Leis da dominação
$p \vee V \equiv V$	
$p \wedge p \equiv p$	Leis idempotentes
$p \vee p \equiv p$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis comutativas
$p \vee q \equiv q \vee p$	
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis associativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis distributivas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	

Leis de De Morgan

Duas equivalências lógicas extremamente importantes no cálculo proposicional são as famosas Leis de De Morgan.

Elas são fundamentais pois nos ensinam como negar uma conjunção/disjunção.

As duas Leis de De Morgan são definidas pelas seguintes equivalências:

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Uma maneira simples de verificar tais equivalências é utilizando o método das tabelas-verdade para mostrar que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ é uma tautologia, com o mesmo sendo válido para o caso das proposições duais.

Observe que essas leis nos ensinam que:

- A negação de duas proposições que são simultaneamente verdadeiras equivale a afirmar que ao menos uma delas é falsa.
- Negar que ao menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Em outras palavras, as Leis de De Morgan nos dizem que a negação transforma a conjunção em disjunção e vice-versa.

- Dessa forma, por exemplo, a negação da sentença Carlos acorda cedo e dorme tarde é Carlos não acorda cedo ou não dorme tarde.
- Por outro lado, a negação da sentença Ela é professora ou médica é Ela não é professora e não é médica.

Outra observação pertinente acerca dessas leis é que elas apresentam uma maneira de definir a conjunção a partir da disjunção e vice-versa, bastando para isso negar as equivalências apresentadas no início desta seção para obter $(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ e $(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Exemplo 1: demonstre, utilizando a álgebra proposicional, que as Leis de De Morgan continuam válidas para o caso de três componentes, ou seja,

a) $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

b) $\neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

	Proposições	Propriedade
1	$\neg(p \wedge q \wedge r)$	Associativa
2	$\neg((p \wedge q) \wedge r)$	De Morgan
3	$\neg(p \wedge q) \vee \neg r$	De Morgan
4	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	

Vale ressaltar que outra possibilidade para mostrar tais equivalências lógicas é utilizar o método das tabelas-verdade. Porém, enquanto o número de proposições atômicas cresce linearmente, o tamanho da tabela-verdade aumenta exponencialmente. Por esse motivo, o estudo da álgebra proposicional é essencial.

Propriedades da condicional e bicondicional

Frequentemente, proposições compostas são definidas em termos de operadores condicionais e bicondicionais.

Um procedimento usualmente adotado na manipulação de expressões que contenham condicionais ou bicondicionais consiste na eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, através da utilização das equivalências lógicas mostradas na tabela a seguir:

	Proposições	Equivalências
1	$(p \rightarrow q)$	$\neg p \vee q$
2	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
3	$(p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Equivalências notáveis

Lei da absorção: a tabela abaixo mostra essa lei e sua respectiva forma dual, bem como uma outra importante equivalência notável, que é basicamente uma generalização da Lei da absorção.

Equivalências Notáveis	Nome
$(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$	Lei da absorção
$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$	
$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$	
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$	

$(p \vee (p \wedge q))$	$\equiv$	$(p \vee V) \vee (p \wedge q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \wedge (V \vee q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \wedge V$	Dominação
	$\equiv$	p	
$(p \wedge (p \vee q))$	$\equiv$	$(p \vee F) \wedge (p \vee q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \vee (F \wedge q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \vee F$	Dominação
	$\equiv$	p	

A prova da lei da absorção composta (e dual) segue na tabela abaixo.

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv ((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee q)$ $\equiv ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$ $\equiv (\vee \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$ $\equiv (q \vee \neg p) \wedge q$ $\equiv q \wedge (q \vee \neg p)$ $\equiv q$	Distributiva Distributiva e comutativa Terceiro excluído e comutativa Identidade e absorção Comutativa Absorção
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv ((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge q)$ $\equiv ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (p \vee q))$ $\equiv (F \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (q \vee p))$ $\equiv (q \wedge \neg p) \vee q$ $\equiv q \vee (q \wedge \neg p)$ $\equiv q$	Distributiva Distributiva e comutativa Contradição e comutativa Identidade e absorção Comutativa Absorção

Formas normais - Forma normal conjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) quando P for uma conjunção $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$, em que cada p_i ($1 \leq i \leq n$) é uma cláusula, ou seja, é uma disjunção de átomos ou um átomo.

Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FNC se e somente se:

- a. contém como conectivos lógicos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
- b. $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$
- c. não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$
- d. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não há expressões como $p \vee (q \wedge r)$

Se Q é uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva equivalente a P , então Q é referenciada como $FNC(P)$.

Exemplo: para a fórmula proposicional $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$, temos,

$$\text{FNC}(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

Procedimento para obtenção da FNC via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P
2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como F
3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a disjunção da seguinte maneira:
 - a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se $\neg p$, e se for F, toma-se p
4. Determinar a conjunção das disjunções obtidas para cada linha F da tabela-verdade de P
5. Se a proposição P é uma tautologia (não há linha F na tabela-verdade), determinase que $\text{FNC}(P) = p \vee \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica

Exemplo: para a fórmula proposicional $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$, temos,

$$\text{FNC}(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
V	V	V	F	V	V	
V	V	F	F	V	F	$\Leftarrow$
V	F	V	F	F	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$

Seguindo o procedimento, temos que a segunda linha da tabela-verdade fornece a cláusula $(\neg p \vee \neg q \vee r)$, a sexta fornece a cláusula $(p \vee \neg q \vee r)$ e a última fornece a cláusula $(p \vee q \vee r)$.

Formas normais - Forma normal disjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Disjuntiva (FND) quando P for uma disjunção $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$, em que cada p_i ($1 \leq i \leq n$) é uma conjunção de átomos ou um átomo.

Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FND se e somente se:

- a. contém como conectivos lógicos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
- b. $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$
- c. não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$
- d. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não há expressões como $p \wedge (q \vee r)$

Analogamente ao caso anterior, se Q é uma fórmula proposicional na forma normal disjuntiva equivalente a P , então, Q é referenciada como $FND(P)$.

Como exemplos de fórmulas proposicionais que estão na FNC, podemos citar:

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
- $p \vee F$
- $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee s$
- $(p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee \neg s$

Já a proposição $\neg(p \wedge q) \vee r$ não está na FND, pois ela contém uma subfórmula (não atômica) negada.

Procedimento para obtenção da FND via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P
2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como V
3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a conjunção da seguinte maneira:
 - a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V , toma-se p , e se for F , toma-se $\neg p$
4. Determinar a disjunção das conjunções obtidas para cada linha V da tabela-verdade de P
5. Se a proposição P é uma contradição (não há linha V na tabela-verdade), determina-se que $FND(P) = p \wedge \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica

considere a fórmula $P = ((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$.

$$\text{FND}(P) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \vee r)$	$(q \vee r) \rightarrow p$	$(p \vee r) \rightarrow q$	P	
V	V	V	V	V	V	V	V	←
V	V	F	V	V	V	V	V	←
V	F	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	F	V	F	
F	F	V	V	V	F	F	F	
F	F	F	F	F	V	V	V	←

Obtenção algébrica de formas normais

A derivação da FNC de uma dada proposição P pode ser realizada por meio da substituição de subfórmulas por proposições equivalentes, sendo que esse processo deve ser repetido até que a forma normal seja obtida.

Apresentaremos a discussão em termos da FNC, sendo que o processo pode ser facilmente adaptado para a FND, modificando apenas o último passo do procedimento.

Procedimento para obtenção da FNC via álgebra proposicional

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas: $\neg(\neg p) \equiv p$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\vee$ (comutativa e distributiva):

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

obter a FNC da proposição lógica $\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$ utilizando a álgebra proposicional.

$\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r)$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg(\neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg p \wedge q \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$	Distributiva

obter a FNC da proposição lógica $(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t))$ utilizando a álgebra proposicional.

$(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t)) \equiv (p \vee (r \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee (r \wedge (s \vee t)))$	Distributiva
$\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s \vee t)$	Distributiva

Procedimento para obtenção da FND via álgebra proposicional.

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas: $\neg(\neg p) \equiv p$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\wedge$ (comutativa e distributiva):

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$