



INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

Campus
Bom Jesus do Itabapoana

Lógica para computadores

Inferência lógica

Professora Ana Mara de Oliveira Figueiredo
ana.figueiredo@iff.edu.br

Argumento válido

Dizemos que um argumento é válido se a conclusão segue logicamente as premissas ou, em outras palavras, se a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Definição 5.1: um argumento é uma sequência $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ de proposições, com $n \geq 1$, na qual as $n - 1$ primeiras proposições P_i são chamadas de premissas e a última proposição, P_n , é chamada de conclusão.

Denota-se um argumento por: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \vdash P_n$

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \vdash P_n$ é dito válido se e somente se $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \models P_n$, ou seja, se e somente se P_n é uma consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$, o que acontece se $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ for uma tautologia.

Um argumento válido pode ser lido de diversas maneiras, dentre as quais :

- $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ acarretam P_n
- P_n decorre de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$
- P_n é consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$

Podemos verificar a validade de um argumento através de tabelas-verdade, mas isso pode ser um trabalho longo e árduo, uma vez que a dimensão dessa tabela depende diretamente do número de átomos existentes na proposição. Por exemplo, a verificação da validade de um argumento que envolve 8 proposições atômicas requer a construção de uma tabela-verdade com $2^8 = 256$ linhas.

Embora existam diferentes sistemas para a realização de derivações, todos eles têm algumas características em comum, que são:

- consideram uma lista de regras de inferência, que nada mais são que argumentos válidos conhecidos;
- a derivação nada mais é que uma lista de proposições lógicas que, inicialmente, é vazia. Novas proposições podem ser adicionadas a essa lista somente se forem premissas (representarem os fatos conhecidos a priori), ou se puderem ser obtidas a partir de proposições anteriores (que já estão na lista) através da aplicação de regras de inferência. Esse processo continua até que a conclusão seja obtida

A regra da inconsistência é válida, pois como $p \wedge \neg p$ é sempre avaliada como F, o argumento $p, \neg p \vdash q$ é sempre válido, uma vez que $F \rightarrow q$ é trivialmente verdade (condição conhecida como vacuidade).

Regra de casos: Essa regra é baseada na seguinte equivalência lógica:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q) \equiv ((p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q))$$

Isso nos permite escrever a seguinte equivalência:

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \equiv (p \vee \neg p) \rightarrow q \equiv \text{V} \rightarrow q \equiv \text{F} \vee q \equiv q$$

ou seja, $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ é uma tautologia, o que implica dizer que q é uma consequência lógica de $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ ou, em outras palavras, que $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash q$ é um argumento válido.

Regra de inferência	Nome da regra
$p, p \rightarrow q \models q$	<i>modus ponens</i> (MP)
$\neg q, p \rightarrow q \models \neg p$	<i>modus tollens</i> (MT)
$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	silogismo hipotético (SH ou regra da cadeia)
$p \vee q, \neg p \models q$	silogismo disjuntivo (SD)
$p \vee q, \neg q \models p$	silogismo disjuntivo (variante)
$p \wedge q \models p$	simplificação (S)
$p \wedge q \models q$	simplificação (variante)
$p, q \models p \wedge q$	conjunção (C)
$p \rightarrow q \models p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção (ABS)
$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \models q$	de casos (*)
$p \models p \vee q$	adição (AD)
$q \models p \vee q$	adição (variante)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \models q \vee s$	dilema construtivo (DC)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \neg q \vee \neg s \models \neg p \vee \neg r$	dilema destrutivo (DD)
$p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$	contraposição (CP)
$p, \neg p \models q$	inconsistência (I)
$p \rightarrow q, q \rightarrow p \models p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência (IE)
$p \leftrightarrow q \models p \rightarrow q$	eliminação da equivalência (EE)
$p \leftrightarrow q \models q \rightarrow p$	eliminação da equivalência (variante)

Usando regra de inferência

Regra da adição: dada uma proposição verdadeira qualquer p , podemos deduzir sua disjunção com qualquer outra proposição q , isto é, $p \vee q$.

a) Suponha a premissa inicial $(p \wedge q)$. Então, aplicando a regra da adição, podemos deduzir, por exemplo, $(p \wedge q) \vee r$ ou ainda $(p \wedge q) \vee s$.

b) $(x < 0) \models (x < 0) \vee (x = 2)$, pois $(x < 0) \vee (x = 2)$ é consequência lógica de $(x < 0)$. c) Um exemplo em linguagem natural: o céu é azul. Logo, o céu é azul ou verde.

Regra da simplificação: dada uma conjunção de duas proposições, $p \wedge q$, podemos deduzir cada uma das proposições individuais, p ou q .

a) Suponha a premissa $(p \vee q) \wedge r$. Então, aplicando a regra da simplificação, podemos deduzir tanto $(p \wedge q)$ quanto r .

b) $(x \in A) \wedge (x \in B) \models (x \in A)$, pois obviamente $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

c) Um exemplo em linguagem natural: Débora toca piano e violão. Logo, Débora toca piano.

Regra da conjunção: permite, a partir de duas proposições dadas p e q (premissas), deduzir sua conjunção, $p \wedge q$.

a) Suponha as premissas $(p \vee q)$ e $\neg r$. Então, aplicando a regra da conjunção, podemos deduzir $(p \vee q) \wedge \neg r$.

b) $(x < 5), (x > 1) \models (x < 5) \wedge (x > 1)$, uma vez que, trivialmente, $(x < 5) \wedge (x > 1)$ é consequência lógica da conjunção das premissas.

c) Um exemplo em linguagem natural é: Rafael estuda. Rafael trabalha. Logo, Rafael estuda e trabalha.

Regra da absorção: permite, a partir de uma condicional $p \rightarrow q$ dada como premissa, deduzir uma outra condicional com o mesmo antecedente p , mas cujo consequente é a conjunção de p com q , isto é, $p \rightarrow (p \wedge q)$.

a) Suponha a premissa $(p \vee q) \rightarrow r$. Então, aplicando a regra da absorção, podemos deduzir $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$.

b) $(x \in A) \rightarrow (x \in A \cup B) \models (x \in A) \rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$, dado que $(x \in A) \rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$ é consequência lógica de $(x \in A) \rightarrow (x \in A \cup B)$.

c) Um exemplo em linguagem natural soa como uma repetição: se eu entro na água, então, eu entro na água e fico molhado.

Regra modus ponens: esta lei, também conhecida como regra de separação, nos permite deduzir uma conclusão q , a partir das premissas $p \rightarrow q$ e p . É a regra mais utilizada em inferência lógica.

a) Considere as premissas $(p \wedge q)$ e $(p \wedge q) \rightarrow r$. Então, aplicando a regra modus ponens, podemos deduzir r .

b) $(x \in A \cap B), ((x \in A \cap B) \rightarrow (x \in A)) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A \cap B) \wedge ((x \in A \cap B) \rightarrow (x \in A))$.

c) Um exemplo em linguagem natural é: se chove, faz frio. Chove. Logo, faz frio.

Regra modus tollens: permite, a partir da premissa $p \rightarrow q$ (condicional) e da negação do conseqüente, $\neg q$, deduzir a negação do antecedente, $\neg p$.

a) Considere as premissas $(q \wedge r) \rightarrow s$ e $\neg s$. Então, podemos deduzir $\neg(q \wedge r)$.

b) Sejam as premissas $p \rightarrow \neg q$ e $\neg(\neg q)$. Aplicando modus tollens temos como conclusão a proposição $\neg p$.

c) $((x \notin A) \rightarrow (x \notin A \cap B)), (x \in A \cap B) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $((x \notin A) \rightarrow (x \notin A \cap B)) \wedge (x \in A \cap B)$. Em outras palavras, se x não pertence a A , então, x não pertence à intersecção de A com B . Agora, se é verdade que x pertence à intersecção de A com B , então x pertence a A .

d) Um outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então eu não saio de casa. Eu saio de casa. Logo, não chove.

Regra do silogismo hipotético: corresponde à propriedade transitiva do conectivo $\rightarrow$. Dadas duas condicionais como premissas, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$, de modo que o conseqüente da primeira seja idêntico ao antecedente da segunda, esta regra permite a dedução de uma outra condicional, $p \rightarrow r$ (conclusão). Devido a essa propriedade esta, lei também é conhecida como regra da cadeia.

a) Considere as premissas $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ e $(q \vee r) \rightarrow \neg s$. Então, aplicando a regra do silogismo hipotético, podemos concluir $\neg p \rightarrow \neg s$.

b) $(|x| = 0 \rightarrow x = 0), (x = 0 \rightarrow x + 1 = 1) \models (|x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$, ou seja, $(|x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$ é consequência lógica de $(|x| = 0 \rightarrow x = 0) \wedge (x = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se o sol se põe, então, fica 87 escuro. Se fica escuro, então, as luzes da cidade se acendem. Portanto, se o sol se põe, então, as luzes da cidade se acendem.

Regra do silogismo disjuntivo: a partir de uma disjunção $p \vee q$, e da negação de uma das proposições, $\neg p$ (ou $\neg q$), esta regra permite deduzir a outra proposição.

a) Considere as premissas $(p \wedge q) \vee r$ e $(\neg r)$. Então, aplicando a regra do silogismo disjuntivo, podemos deduzir $(p \wedge q)$.

b) $(x = 0 \vee x = 1), (x \neq 1) \models (x = 0)$, ou seja, $(x = 0)$ é consequência lógica de $(x = 0 \vee x = 1) \wedge (x \neq 1)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: Maria está falando baixo demais ou João tem problemas auditivos. Maria não está falando baixo demais. Portanto, João tem problemas auditivos.

Regra do dilema construtivo: a partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos ($p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$), e a disjunção de seus antecedentes, $p \vee r$, esta regra permite concluir a disjunção dos consequentes destas condicionais, $q \vee s$.

a) Considere as premissas $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$, $s \rightarrow t$ e $(p \wedge q) \vee s$. Então, aplicando a regra do dilema construtivo, podemos deduzir $\neg r \vee t$.

b) $(x < y \rightarrow x = 1), (x > y \rightarrow x = 2), (x < y \vee x > y) \models (x = 1 \vee x = 2)$, ou seja, $(x = 1 \vee x = 2)$ é consequência lógica de $(x < y \rightarrow x = 1) \wedge (x > y \rightarrow x = 2) \wedge (x < y \vee x > y)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se estou com fome, então, como. Se estou com sede, então, bebo água. Estou com fome ou com sede. Logo, como ou bebo.

Regra do dilema destrutivo: esta regra é bastante similar à anterior. A partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos ($p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$), e a disjunção da negação de seus consequentes, $\neg q \vee \neg s$, esta regra permite concluir a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais, $\neg p \vee \neg r$.

a) Considere as premissas $\neg q \rightarrow r$, $p \rightarrow \neg s$ e $\neg r \vee s$. Então, aplicando a regra do dilema destrutivo, podemos deduzir $q \vee \neg p$.

b) $(x < 10 \rightarrow x = 1), (x > 20 \rightarrow x = 2), (x \neq 1 \vee x \neq 2) \models (x \geq 10 \vee x \leq 20)$, ou seja, $(x \geq 10 \vee x \leq 20)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow x = 1) \wedge (x > 20 \rightarrow x = 2) \wedge (x \neq 1 \vee x \neq 2)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se há luz do sol, então, é dia. Se chove, então, há nuvens no céu. Não é dia ou não há nuvens no céu. Logo, não há luz do sol ou não chove.

Regra de casos: a partir de duas premissas condicionais com mesmo consequente e antecedentes complementares ($p \rightarrow q$, $\neg p \rightarrow q$), esta regra permite concluir o antecedente comum destas condicionais, q .

a) Considere as premissas $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$, $\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)$. Então, aplicando a regra de casos, podemos deduzir $(\neg q \wedge r)$.

b) $(x < 10 \rightarrow y = 1), (x \geq 10 \rightarrow y = 1) \models (y = 1)$, ou seja, $(y = 1)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow y = 1) \wedge (x \geq 10 \rightarrow y = 1)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então, não saio de casa e estudo. Se não chove, então, não saio de casa e estudo. Logo, não saio de casa e estudo.

Exemplos

Escreva cada um dos argumentos válidos a seguir na forma condicional:

a) $\neg p, \neg q \rightarrow p \models q$

Solução: sabemos que se argumento acima é válido, então, q é consequência lógica das premissas, ou seja, escrevendo na forma condicional, temos: $(\neg p \wedge (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow q$

b) $p \rightarrow q \models \neg(p \wedge \neg q)$

Solução: escrevendo na forma condicional temos a seguinte proposição tautológica: $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

c) $p, p \rightarrow q, \neg q \vee (r \wedge s) \models (r \wedge s)$

Solução: reescrevendo o argumento válido na forma condicional, temos a tautologia: $(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s))) \rightarrow (r \wedge s)$

Exemplos

Utilize cada uma das regras de inferência citadas para concluir adequadamente cada um dos seguintes conjuntos de premissas:

a) modus ponens

P1: $(x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z$

P2: $x > y \wedge y > z$

C: $x > z \Leftarrow$ MP em P1 e P2

Exemplos

b) modus tollens

P1: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s)$

P2: $\neg(\neg(r \wedge s))$

C: $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Leftarrow$ MT em P1 e P2

Exemplos

c) silogismo disjuntivo

P1: $(s \rightarrow p) \vee (r \wedge t)$

P2: $\neg(r \wedge t)$

C: $(s \rightarrow p) \equiv (\neg s \vee p) \Leftarrow$ SD em P1 e P2

d) silogismo hipotético

P1: $(s \vee t) \rightarrow (r \wedge q)$

P2: $(r \wedge q) \rightarrow \neg p$

C: $(s \vee t) \rightarrow \neg p \Leftarrow$ SH em P1 e P2

Exemplos

e) dilema construtivo

P1: $p \rightarrow r$

P2: $\neg q \rightarrow \neg s$

P3: $p \vee \neg q$

C: $(r \vee \neg s) \Leftarrow$ DC em P1, P2 e P3

Exemplos

f) dilema destrutivo

$$P1: p \rightarrow (\neg r \wedge q)$$

$$P2: \neg(\neg r \wedge q) \vee \neg s$$

$$P3: \neg q \rightarrow s$$

$$C: (\neg p \vee \neg \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \Leftarrow \text{DD em P1, P3 e P2}$$

Validade de argumentos mediante tabelas-verdade

Para testar a validade do seguinte argumento: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$

Uma maneira de resolver este problema consiste em verificar se q é consequência lógica das premissas $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Para isso, basta verificar se a forma condicional do argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ é uma tautologia.

Verificar a validade do argumento $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$

O primeiro passo consiste na especificação da forma condicional do argumento, que é $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$. A seguir, construímos a tabela-verdade para a proposição resultante:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como a forma condicional do argumento não é uma tautologia, $\neg q$ não é consequência lógica das premissas e, portanto, o argumento em questão não é válido

Exemplo

Verificar mediante tabela-verdade se é válido o argumento seguinte.

Se $x = 0$, então $x + y = y$

Se $y = z$, então $x + y \neq y$

Logo, se $x = 0$, então $y \neq z$

O primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples $x = 0$ de p , $x + y = y$ de q e $y = z$ de r , o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como: $p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash p \rightarrow \neg r$

Assim, para verificar se o argumento é válido basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$$

Como a forma condicional do argumento é uma tautologia, ou seja, a proposição $(p \rightarrow \neg r)$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(p \rightarrow q)$	$(r \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow \neg r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$	P
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Exemplo

Verificar mediante tabela-verdade a validade do argumento seguinte.

Se Carlos está com fome, então, ele come.

Carlos dorme ou não come.

Carlos está acordado.

Portanto, Carlos não está com fome.

Observação: dormir é equivalente a não estar acordado.

O primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples Carlos está com fome, Carlos come e Carlos está acordado de p , q e r , respectivamente, o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como: $p \rightarrow q, \neg r \vee \neg q, r \vdash \neg p$

Assim, para verificar se o argumento é válido, basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = (((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

$$P = (((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg r \vee \neg q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r$	P
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V

Como a forma condicional do argumento é tautológica, ou seja, $\neg p$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

Validade de argumentos mediante regras de inferência

verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$p \wedge r$	premissa	
(3)	p	simplificação	2
(4)	q	<i>modus ponens</i>	1, 3

Aplicando a regra da simplificação na segunda premissa, inferimos p .

De p (premissa 3) e $p \rightarrow q$ (premissa 1), aplicando a regra *modus ponens*, chega-se à conclusão q .

Portanto, como concluímos q a partir das premissas, o argumento dado é válido.

verificar mediante regras de inferência a validade do argumento

$p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow r, \neg(p \wedge r) \vdash \neg p.$

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg(p \wedge r)$	premissa	
(4)	$p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção	1
(5)	$p \rightarrow r$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$p \rightarrow (p \wedge r)$	absorção	5
(7)	$\neg p$	<i>modus tollens</i>	3, 6

Verificar que o argumento seguinte é válido:

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t$$

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	<i>modus ponens</i>	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	4, 8

Se as uvas caem, então, a raposa as come.

Se a raposa as come, então, estão maduras.

As uvas estão verdes ou caem.

Logo, a raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Identificando as proposições atômicas nas sentenças em linguagem natural escritas neste exemplo, tem-se:

p : as uvas caem

q : a raposa come as uvas

r : as uvas estão maduras

Reescrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos o seguinte argumento:

$p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q$

$p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q$

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$q \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee p$	premissa	
(4)	$r \rightarrow p$	equivalência lógica	3
(5)	$q \rightarrow p$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	conjunção	1, 5
(7)	$p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência	6