

UNIDADE 4

Álgebra proposicional

4.1 Primeiras palavras

A definição de uma álgebra das proposições é fundamental para o tratamento analítico de fórmulas da lógica proposicional. Isso é particularmente importante nos casos em que a construção de tabelas-verdade torna-se uma tarefa inviável ou demasiadamente trabalhosa. Esta unidade apresenta as principais propriedades dos operadores lógicos vistos até o momento, o que define a álgebra proposicional, bem como duas representações padrão para sentenças válidas da lógica proposicional, que são as formas normais conjuntiva e disjuntiva.

4.2 Problematicando o tema

Um assunto de fundamental importância na lógica proposicional é o estudo da álgebra das proposições. Uma pergunta que parece natural neste momento é justamente a seguinte: é possível manipular proposições lógicas com o intuito de simplificá-las ou mesmo reescrevê-las em uma outra representação equivalente, assim como acontece com expressões algébricas da matemática? A resposta para essa pergunta é justamente o principal objetivo desta unidade, que irá discutir as principais propriedades dos operadores lógicos que estudamos anteriormente, bem como duas representações padrões para uma proposição, que são as formas normais conjuntiva (FNC) e disjuntiva (FND), importantes tanto na identificação quanto na comparação de duas ou mais fórmulas bem-formadas. Com base nos conceitos que serão discutidos aqui, será possível, por exemplo, encontrar proposições logicamente equivalentes a uma dada proposição P , sem a utilização de tabelas-verdade. A grande vantagem disso reside no fato de que, enquanto o número de proposições atômicas em P cresce linearmente (n), o número de linhas da tabela-verdade cresce exponencialmente (2^n), tornando inviável sua construção. Por essa razão, o estudo da álgebra proposicional é indispensável.

4.3 Propriedades dos operadores conjunção e disjunção

Nesta seção serão discutidas equivalências importantes que são amplamente empregadas na simplificação e manipulação de expressões lógicas com o intuito de provar a validade de argumentos. Tais equivalências podem ser facilmente provadas utilizando o método das tabelas-verdade.

Um comentário relevante consiste no significado do termo *dual* em lógica proposicional. Para qualquer proposição P definida apenas em termos de símbolos atômicos ($p, q, \dots$), símbolos de verdade (V ou F) e dos conectivos $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção), seu par dual (proposição dual a P) é encontrado substituindo todas as ocorrências dos símbolos V por F e vice-versa, bem como todo conectivo $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa. Por exemplo, o dual da proposição $(p \wedge q) \vee F$ é a proposição $(p \vee q) \wedge V$. A seguir é apresentada uma tabela que sumariza as propriedades básicas dos operadores de conjunção e disjunção.

Leis	Nomes
$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leis comutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leis associativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leis distributivas

Note que cada uma das leis indicadas na tabela estão acompanhadas do seu dual, mostrando que o que vale para o operador $\wedge$ também vale para $\vee$.

4.3.1 Leis de De Morgan

Duas equivalências lógicas extremamente importantes no cálculo proposicional são as famosas Leis de De Morgan. Elas são fundamentais pois nos ensinam como negar uma conjunção/disjunção. As duas Leis de De Morgan são definidas pelas seguintes equivalências:

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Uma maneira simples de verificar tais equivalências é utilizando o método das tabelas-verdade para mostrar que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ é uma tautologia, com o mesmo sendo válido para o caso das proposições duais. Observe que essas leis nos ensinam que:

- A negação de duas proposições que são simultaneamente verdadeiras equivale a afirmar que ao menos uma delas é falsa.
- Negar que ao menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Em outras palavras, as Leis de De Morgan nos dizem que a negação transforma a conjunção em disjunção e vice-versa. Dessa forma, por exemplo, a negação da sentença *Carlos acorda cedo e dorme tarde* é *Carlos não acorda cedo ou não dorme tarde*. Por outro lado, a negação da sentença *Ela é professora ou médica* é *Ela não é professora e não é médica*. Outra observação pertinente acerca dessas leis é que elas apresentam uma maneira de definir a conjunção a partir da disjunção e vice-versa, bastando para isso negar as equivalências apresentadas no início desta seção para obter $(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

e $(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$. O exemplo a seguir mostra que as Leis de De Morgan podem ser generalizadas para conjunções ou disjunções envolvendo mais que dois símbolos atômicos.

Exemplo 1: demonstre, utilizando a álgebra proposicional, que as Leis de De Morgan continuam válidas para o caso de três componentes, ou seja,

$$\text{a) } \neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

$$\text{b) } \neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

O item a) pode ser resolvido aplicando a seguinte sequência de operações:

	Proposições	Propriedade
1	$\neg(p \wedge q \wedge r)$	Associativa
2	$\neg((p \wedge q) \wedge r)$	De Morgan
3	$\neg(p \wedge q) \vee \neg r$	De Morgan
4	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	

Para o item b) a solução é obtida a partir da aplicação da mesma sequência de operações. Vale ressaltar que outra possibilidade para mostrar tais equivalências lógicas é utilizar o método das tabelas-verdade. Porém, enquanto o número de proposições atômicas cresce linearmente, o tamanho da tabela-verdade aumenta exponencialmente. Por esse motivo, o estudo da álgebra proposicional é essencial.

4.4 Propriedades da condicional e bicondicional

Frequentemente, proposições compostas são definidas em termos de operadores condicionais e bicondicionais. Um procedimento usualmente adotado na manipulação de expressões que contenham condicionais ou bicondicionais consiste na eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, através da utilização das equivalências lógicas mostradas na tabela a seguir.

	Proposições	Equivalências
1	$(p \rightarrow q)$	$\neg p \vee q$
2	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
3	$(p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

A equivalência (3) é mostrada utilizando a tabela-verdade a seguir, na qual é possível verificar que $P = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$ é uma tautologia.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$	P
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

4.4.1 Equivalências notáveis

A partir das regras da álgebra proposicional e das equivalências lógicas apresentadas até o momento, podemos derivar outra importante lei conhecida como a Lei da absorção. A tabela abaixo mostra essa lei e sua respectiva forma dual, bem como uma outra importante equivalência notável, que é basicamente uma generalização da Lei da absorção.

Equivalências Notáveis	Nome
$(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$	Lei da absorção
$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$	

A seguir provaremos as duas equivalências acima utilizando apenas re-

gras da álgebra proposicional. Note que, alternativamente, poderíamos utilizar tabelas-verdade para esse fim. A demonstração a seguir refere-se à prova da Lei da absorção. O símbolo $\vee$ refere-se ao valor lógico verdade. Uma observação pertinente é com relação à passagem da primeira para a segunda linha da prova. A utilização da propriedade distributiva ocorre de maneira inversa ao que estamos acostumados, análoga ao que acontece com a operação de colocar uma variável em evidência, utilizada com frequência na manipulação de equações matemáticas.

$(p \vee (p \wedge q))$	$\equiv$	$(p \vee V) \vee (p \wedge q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \wedge (V \vee q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \wedge V$	Dominação
	$\equiv$	p	
$(p \wedge (p \vee q))$	$\equiv$	$(p \vee F) \wedge (p \vee q)$	Identidade
	$\equiv$	$p \vee (F \wedge q)$	Distributiva
	$\equiv$	$p \vee F$	Dominação
	$\equiv$	p	

A prova da lei da absorção composta (e dual) segue na tabela abaixo.

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$	$\equiv$	$((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee q)$	Distributiva
	$\equiv$	$((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$	Distributiva e comutativa
	$\equiv$	$(V \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q))$	Terceiro excluído e comutativa
	$\equiv$	$(q \vee \neg p) \wedge q$	Identidade e absorção
	$\equiv$	$q \wedge (q \vee \neg p)$	Comutativa
	$\equiv$	q	Absorção
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$	$\equiv$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge q)$	Distributiva
	$\equiv$	$((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (p \vee q))$	Distributiva e comutativa
	$\equiv$	$(F \vee (q \wedge \neg p)) \vee (q \wedge (q \vee p))$	Contradição e comutativa
	$\equiv$	$(q \wedge \neg p) \vee q$	Identidade e absorção
	$\equiv$	$q \vee (q \wedge \neg p)$	Comutativa
	$\equiv$	q	Absorção

4.5 Formas normais

Com o que foi apresentado até o momento, podemos observar que existem diversas maneiras de escrever uma mesma fórmula. Por exemplo, as fórmulas equivalentes $(p \rightarrow q) \wedge r \equiv (\neg p \vee q) \wedge r$ são duas representações lógicas do mesmo conceito. Uma pergunta natural que surge nesse momento é a seguinte: seria possível criar uma padronização para proposições compostas, afim de tornar a comparação de expressões algo mais simples e objetivo? Veremos a seguir que, em muitas situações é conveniente adotar uma notação padrão, com o objetivo de expressar proposições compostas de maneira única. Em resumo, a ideia de normalizar as fórmulas visa facilitar tanto a identificação quanto a comparação de duas ou mais proposições.

Duas formas normais são particularmente utilizadas para esse fim: a Forma Normal Conjuntiva (FNC) e a Forma Normal Disjuntiva (FND). Dada qualquer expressão da lógica proposicional, é sempre possível determinar uma expressão equivalente que esteja representada tanto na Forma Normal Conjuntiva quanto na Forma Normal Disjuntiva. Nas seções a seguir iremos descrever como transformar uma proposição qualquer para as formas normais.

4.5.1 Forma normal conjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) quando P for uma conjunção $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$, em que cada p_i ($1 \leq i \leq n$) é uma *cláusula*, ou seja, é uma disjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FNC se e somente se:

- contém como conectivos lógicos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
- $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$
- não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$
- $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não há expressões como $p \vee (q \wedge r)$

Se Q é uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva equivalente a P , então Q é referenciada como $FNC(P)$.

Exemplo 2: para a fórmula proposicional $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$, temos,

$$FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \quad (4.1)$$

Pode-se mostrar que uma FNC é uma tautologia se e somente se cada elemento da conjunção for uma tautologia, ou seja, somente se cada cláusula for uma tautologia. As seguintes fórmulas proposicionais estão na FNC: $p \wedge (q \vee r)$, $p \wedge V$ e $\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge s$.

Já a expressão $p \wedge (r \vee (p \wedge s))$ não se encontra na FNC porque a disjunção $(r \vee (p \wedge s))$ contém uma conjunção como subfórmula. Para que uma expressão possa ser qualificada como uma fórmula proposicional na FNC, nenhuma disjunção deve ter uma conjunção como subfórmula. A seguir veremos um procedimento para a obtenção da FNC de uma proposição lógica P através da construção da tabela-verdade.

Tabela 4.1 Procedimento para obtenção da FNC via tabela-verdade.

-
1. Construir a tabela-verdade da proposição P
 2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como F
 3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a disjunção da seguinte maneira:
 - a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se $\neg p$, e se for F, toma-se p
 4. Determinar a conjunção das disjunções obtidas para cada linha F da tabela-verdade de P
 5. Se a proposição P é uma tautologia (não há linha F na tabela-verdade), determina-se que $FNC(P) = p \vee \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica
-

Exemplo 3: considere a fórmula $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$. Obtenha $FNC(P)$.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P , temos:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
V	V	V	F	V	V	
V	V	F	F	V	F	$\Leftarrow$
V	F	V	F	F	V	
V	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	V	V	V	V	
F	F	F	V	V	F	$\Leftarrow$

Assim, de acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.1, a $FNC(P)$ será composta por três cláusulas, cada uma referente a uma linha F da tabela-verdade de P . Seguindo o procedimento, temos que a segunda linha da tabela-verdade fornece a cláusula $(\neg p \vee \neg q \vee r)$, a sexta fornece a cláusula $(p \vee \neg q \vee r)$ e a última fornece a cláusula $(p \vee q \vee r)$. Portanto, temos como solução a seguinte representação:

$$FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \quad (4.2)$$

4.5.2 Forma normal disjuntiva

Dizemos que uma fórmula proposicional P está na Forma Normal Disjuntiva (FND) quando P for uma disjunção $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$, em que cada p_i ($1 \leq i \leq n$) é uma conjunção de átomos ou um átomo. Podemos dizer, então, que uma fórmula P está na FND se e somente se:

- a. contém como conectivos lógicos apenas $\wedge, \vee$ e $\neg$
- b. $\neg$ opera apenas sobre átomos, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$
- c. não apresenta operadores de negação sucessivos, como $\neg\neg$
- d. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não há expressões como $p \wedge (q \vee r)$

Analogamente ao caso anterior, se Q é uma fórmula proposicional na forma normal disjuntiva equivalente a P , então, Q é referenciada como $FND(P)$. Como exemplos de fórmulas proposicionais que estão na FNC, podemos citar:

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
- $p \vee F$
- $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee s$
- $(p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee \neg s$

Já a proposição $\neg(p \wedge q) \vee r$ não está na FND, pois ela contém uma subfórmula (não atômica) negada. Apenas subfórmulas atômicas podem aparecer negadas nas formas normais. Isso ocorre porque, de acordo com as Leis de De Morgan, a fórmula anterior ainda poderia ser simplificada. A seguir veremos um procedimento para a obtenção da FND de uma proposição lógica P através da construção da tabela-verdade, análogo ao que foi apresentado na seção anterior.

Exemplo 4: considere a fórmula $P = ((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$. Obtenha $FNC(P)$.

Solução:

Construindo a tabela-verdade de P , temos:

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \vee r)$	$(q \vee r) \rightarrow p$	$(p \vee r) \rightarrow q$	P	
V	V	V	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	V	F	V	V	V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	F	F	
F	V	V	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	F	V	F	
F	F	V	V	V	F	F	F	
F	F	F	F	F	V	V	V	$\Leftarrow$

De acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.2, a FND(P) será composta por três subfórmulas, cada uma referente a uma linha V da tabela-verdade de P. Similarmente ao caso anterior da FNC, ao seguir as instruções do procedimento descrito na tabela 4.2, tem-se:

$$\text{FND}(P) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (4.3)$$

Tabela 4.2 Procedimento para obtenção da FND via tabela-verdade.

1. Construir a tabela-verdade da proposição P
2. Procurar na tabela-verdade as linhas que avaliam P como V
3. Para cada uma dessas linhas, constrói-se a conjunção da seguinte maneira:
 - a) Para cada átomo presente na fórmula proposicional, se o valor lógico do átomo é V, toma-se p, e se for F, toma-se $\neg p$
4. Determinar a disjunção das conjunções obtidas para cada linha V da tabela-verdade de P
5. Se a proposição P é uma contradição (não há linha V na tabela-verdade), determina-se que $\text{FND}(P) = p \wedge \neg p$, na qual p é uma fórmula atômica

Isso nos permite definir a seguinte equivalência:

$$((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (4.4)$$

4.5.3 Obtenção algébrica de formas normais

Podemos obter as formas normais (FNC e FND) de proposições lógicas diretamente a partir de regras da álgebra proposicional, sem a necessidade de construção da tabela-verdade. Apresentaremos a discussão em termos da FNC, sendo que o processo pode ser facilmente adaptado para a FND, modificando apenas o último passo do procedimento.

A derivação da FNC de uma dada proposição P pode ser realizada por meio da substituição de subfórmulas por proposições equivalentes, sendo que esse processo deve ser repetido até que a forma normal seja obtida. O procedimento para a obtenção da FNC é descrito em detalhes na Tabela 4.3, conforme a definição encontrada em Nicoletti (2009).

Exemplo 5: obter a FNC da proposição lógica $\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$ utilizando a álgebra proposicional.

Solução:

$\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r)$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg(p \vee \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg(\neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$\neg p \wedge q \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$	Distributiva

Exemplo 6: obter a FNC da proposição lógica $(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t))$ utilizando a álgebra proposicional.

Solução:

$(p \wedge q) \vee (r \wedge (s \vee t))$	$\equiv$	$(p \vee (r \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee (r \wedge (s \vee t)))$	Distributiva
	$\equiv$	$(p \vee r) \wedge (p \vee s \vee t) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s \vee t)$	Distributiva

Tabela 4.3 Procedimento para obtenção da FNC via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal conjuntiva de uma fórmula P , os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação:

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas:

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\vee$ (comutativa e distributiva):

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

Exemplo 7: obter a FNC da expressão lógica $P = (\neg p \vee q) \rightarrow r$ utilizando tanto a regra da tabela-verdade quanto a sequência de regras da álgebra proposicional. Mostre a equivalência entre P e $FNC(P)$, bem como entre os resultados obtidos por ambos os métodos.

Solução:

Primeiramente, devemos construir a tabela-verdade de $(\neg p \vee q) \rightarrow r$. Note que ela já foi construída no Exemplo 2. Observando as linhas F da tabela-verdade, e de acordo com o procedimento descrito na Tabela 4.1, tem-se $FNC(P) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$.

Para não sobrecarregar a notação, considere a seguinte nomeação de variáveis: $Q = (\neg p \vee \neg q \vee r)$, $R = (p \vee \neg q \vee r)$, $S = (p \vee q \vee r)$. Assim, podemos verificar a equivalência entre P e $FNC(P)$ mostrando que $P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$ é uma tautologia. Isso pode ser feito através da construção da seguinte tabela-verdade:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	P	Q	R	S	$(Q \wedge R \wedge S)$	$P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S)$
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V

Assim, como a última coluna da tabela-verdade é composta somente por valores lógicos V, $(P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge S))$ é uma tautologia, o que significa que $P \equiv (Q \wedge R \wedge S)$. A determinação da FNC de P através das regras da álgebra proposicional pode ser realizada de acordo com a seguinte sequência de

passos:

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	$\equiv$	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg r$	Equivalência da implicação
	$\equiv$	$(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r$	De Morgan
	$\equiv$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	Dupla negação
	$\equiv$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	Distributiva

A FNC obtida pelo método da tabela-verdade é equivalente à FNC obtida por meio de equivalências lógicas. Para evidenciar essa equivalência, $(Q \wedge R \wedge S) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$, basta verificar que a proposição $T = (Q \wedge R \wedge S) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$ é uma tautologia. A tabela-verdade abaixo mostra a equivalência em questão.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee r$	$\neg q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	$(Q \wedge R \wedge S)$	T
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F	V

Portanto, foi mostrado que o resultado obtido por ambos os métodos são de fato equivalentes, ou seja, $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$.

Por fim, o procedimento para a obtenção da FND utilizando as regras da álgebra proposicional é idêntico ao apresentado para a FNC, com exceção do último passo (3) da Tabela 4.3. A Tabela 4.4 descreve o método em detalhes.

Tabela 4.4 Procedimento para obtenção da FND via álgebra proposicional.

Para a obtenção da forma normal conjuntiva de uma fórmula P , os seguintes passos devem ser seguidos, quando passíveis de aplicação:

1. Utilizar repetidamente as equivalências a seguir para eliminação dos conectivos lógicos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

2. a) Utilizar repetidamente a Lei da dupla negação para a eliminação de negações múltiplas:

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

b) Utilizar repetidamente as Leis de De Morgan para a redução do escopo da negação:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

3. Quando a expressão obtida não tiver subfórmulas compostas negadas, as duas leis a seguir são utilizadas para reduzir o escopo do operador $\wedge$ (comutativa e distributiva):

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Exemplo 8: esse exemplo ilustra algumas situações interessantes que podem ocorrer na álgebra proposicional. Além disso, trata-se de mais um exercício de como aplicar a Lei distributiva ao se utilizar os operadores $\wedge$ e $\vee$.

a) Obter a FND da proposição $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$.

Note que, neste caso, a expressão dada se encontra na FNC. Portanto, para a convertermos em FND é preciso aplicar a Lei distributiva, com o intuito de reduzir o escopo do operador $\wedge$. Assim, distribuindo o operador $\wedge$ podemos escrever:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s))$$

Distribuindo novamente os operadores $\wedge$ internos, temos:

$$(p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s))$$

A fórmula resultante já está na FND. Basta remover os parêntesis mais externos para evidenciar a notação.

b) Obter a FNC da proposição $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.

Agora, temos como ponto de partida uma expressão na FND (dual da proposição anterior). Distribuindo o operador $\vee$, temos:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s))$$

Distribuindo novamente os operadores $\vee$ internos, temos:

$$(p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s))$$

c) Obter a FNC e a FND da proposição $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$.

Note que, neste caso, a proposição inicial já se encontra na FND, bastando remover os parêntesis em torno de $r \vee s$ para evidenciar tal fato. Para escrevermos a proposição na FNC, primeiramente devemos utilizar as Leis associativa e comutativa:

$$((p \wedge q) \vee (r \vee s)) \equiv (r \vee (p \wedge q)) \vee s$$

Aplicando a distributiva no $\vee$ mais interno e, em seguida, a Lei comutativa, temos:

$$(r \vee (p \wedge q)) \vee s \equiv s \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee q))$$

Aplicando a distributiva no $\vee$ mais externo e a Lei associativa, temos finalmente:

$$s \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee q)) \equiv (s \vee r \vee p) \wedge (s \vee r \vee q)$$

4.6 Conclusões

A presente unidade apresentou uma introdução à álgebra proposicional, através das propriedades dos operadores lógicos e de equivalências lógicas importantes. A principal motivação para este estudo é o fato de a álgebra das

proposições definir as bases do cálculo proposicional, pois fornece as ferramentas necessárias para que, juntamente com as regras de inferência, seja possível deduzir conclusões lógicas válidas a partir de um conjunto inicial de fatos (premissas). Além disso, foi apresentado o conceito de forma normal, através da definição das formas normais conjuntiva (FNC) e disjuntiva (FND), que além de ajudar a padronizar a notação, facilita a identificação e comparação entre duas ou mais proposições compostas. Foram discutidos dois métodos para encontrar a FNC e a FND de proposições compostas em geral, um baseado na construção de tabelas-verdade e outro na utilização das regras da álgebra proposicional.

4.7 Estudos complementares

Para o leitor interessado em se aprofundar no assunto tratado nesta unidade, recomendamos Rautenberg (2010) e o clássico Hilbert & Ackermann (1999). Em ambos os livros são apresentadas discussões importantes sobre a álgebra proposicional e formas normais, relevantes para um estudo mais formal da lógica matemática.

Um assunto diretamente relacionado a esta unidade e de extrema relevância para a computação é a definição do operador lógico denominado ‘NÃO-E’, usualmente representado por uma barra vertical $|$. A operação $p|q$ é equivalente à $\neg(p \wedge q)$, ou seja, $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$. Existe um resultado teórico que garante ser possível a definição de qualquer função lógica de duas variáveis (V e F, ou 0 e 1) utilizando apenas a função lógica ‘NÃO-E’. Apesar de teórico, tal resultado traz uma série de implicações práticas, como, por exemplo, o fato de qualquer circuito digital poder ser construído apenas com um tipo de componente eletrônico (as portas lógicas ‘NÃO-E’), o que representa uma enorme economia no custo de produção de placas e dispositivos digitais. Maiores detalhes sobre esse resultado e a teoria matemática que o fundamenta podem ser encontrados em Souza (2008).

4.8 Exercícios

1) Utilizar a Lei de De Morgan para negar a sentença: *Rosas são vermelhas e violetas são azuis.*

2) Utilizando tanto o método da tabela-verdade quanto a álgebra proposicional, determine a FNC de cada uma das proposições a seguir:

- | | |
|--|---|
| a) $p \rightarrow \neg q$ | b) $\neg(p \wedge q)$ |
| c) $(p \wedge q) \vee q$ | d) $p \wedge \neg(q \vee r)$ |
| e) $\neg(p \wedge (q \vee r))$ | f) $p \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ |
| g) $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$ | h) $\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$ |

3) Utilizando tanto o método da tabela-verdade quanto a álgebra proposicional, determine a FND de cada uma das proposições a seguir:

- | | |
|--|---|
| a) $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ | b) $\neg q \wedge (q \rightarrow r)$ |
| c) $(p \rightarrow q) \vee \neg p$ | d) $(\neg p \vee q) \vee q$ |
| e) $\neg(p \wedge (q \vee r))$ | f) $p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow s$ |
| g) $\neg(p \vee q) \wedge (s \rightarrow t)$ | h) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ |

4) Obtenha uma fórmula equivalente à $\neg(p \wedge q) \vee r$, apenas com o operador $\rightarrow$.

5) Demonstrar, utilizando as regras da álgebra proposicional, as Leis de De Morgan para quatro componentes:

- | |
|---|
| a) $\neg(p \wedge q \wedge r \wedge s) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$ |
| b) $\neg(p \vee q \vee r \vee s) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$ |

Desafio: o problema de Post (Emil Leon Post, 1897-1954) consiste em determinar se para toda tabela-verdade existe uma fórmula que a determine. Em termos práticos, dada uma tabela-verdade, deseja-se saber qual é a expressão lógica correspondente. Este problema é muito importante para a computação, pois é a base para o projeto de circuitos digitais. Considere a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	P
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Mostre, através da álgebra proposicional, que $P \equiv ((q \vee r) \rightarrow p) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$. Sugestão: considere a FND de P como ponto de partida.

4.9 Referências

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

4.10 Referências consultadas

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.