

UNIDADE 5

Inferência lógica

5.1 Primeiras palavras

Um dos principais objetivos da lógica matemática, mais precisamente da lógica proposicional, é justamente o estudo de estruturas formais que possam ser empregadas na representação e dedução de conhecimento (SOUZA, 2008, p. 79). Assim, além de definir uma maneira de representação do conhecimento (como pudemos ver nas unidades anteriores), o estudo da lógica também compreende a análise formal de mecanismos de dedução de conhecimento a partir de um dado conjunto de fatos existentes *a priori*. Isso é justamente a definição de cálculo proposicional, e será o tópico abordado nesta unidade.

5.2 Problematicando o tema

O principal problema discutido nesta unidade é a verificação da validade de uma conclusão lógica a partir de um conjunto de proposições dadas (premissas). Será apresentado um conjunto de regras de inferência lógica que nos permite, a partir de um conjunto inicial de fatos, obter conclusões logicamente válidas, muitas vezes não óbvias à primeira vista. Dentro desse contexto, um conceito fundamental que será discutido é o de argumento válido, que define a base do raciocínio lógico. O principal objetivo desta unidade é justamente verificar a validade de argumentos, que nada mais são que sequências de proposições lógicas seguidas de uma conclusão.

5.3 Argumento válido

Podemos expressar padrões de raciocínio de diversas maneiras. Na linguagem natural, em geral, a conclusão é colocada após as premissas e indicada por algumas palavras-chave como *então*, *logo*, *portanto*, *como consequência*, *conclui-se*, etc (NICOLETTI, 2009, p. 45). Dizemos que um argumento é válido se a conclusão segue logicamente as premissas ou, em outras palavras, se a conclusão é uma consequência lógica das premissas.

Definição 5.1: um *argumento* é uma sequência $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ de proposições, com $n \geq 1$, na qual as $n - 1$ primeiras proposições P_i são chamadas de premissas e a última proposição, P_n , é chamada de conclusão. Denota-se um argumento por:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \vdash P_n \quad (5.1)$$

Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \vdash P_n$ é dito válido se e somente se $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} \models P_n$, ou seja, se e somente se P_n é uma consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$, o que, conforme visto na Unidade 3, acontece se $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ for uma tautologia. Um argumento válido pode ser lido de diversas maneiras, dentre as quais (NICOLETTI, 2009):

- $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ acarretam P_n
- P_n decorre de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$
- P_n é consequência lógica de $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$

Podemos verificar a validade de um argumento através de tabelas-verdade, mas isso pode ser um trabalho longo e árduo, uma vez que a dimensão dessa tabela depende diretamente do número de átomos existentes na proposição. Por exemplo, a verificação da validade de um argumento que envolve 8 proposições atômicas requer a construção de uma tabela-verdade com $2^8 = 256$ linhas.

Por essa razão, uma das maneiras mais usuais de mostrar que um determinado argumento é válido é através de um procedimento que faz uso de algumas regras de inferências, que nada mais são que argumentos válidos notáveis já conhecidos (e por isso tabelados), bem como de equivalências lógicas (através de regras da álgebra proposicional). Esse processo fornece a noção básica do conceito de derivação formal, também conhecido como prova formal, tópico que será estudado em maiores detalhes na unidade 6. Esses argumentos válidos notáveis apresentam um conjunto de regras que definem as operações básicas

para a realização de inferências lógicas.

Uma observação relevante apontada em Nicoletti (2009) é que, embora existam diferentes sistemas para a realização de derivações, todos eles têm algumas características em comum, que são:

- consideram uma lista de regras de inferência, que nada mais são que argumentos válidos conhecidos;
- a derivação nada mais é que uma lista de proposições lógicas que, inicialmente, é vazia. Novas proposições podem ser adicionadas a essa lista somente se forem premissas (representarem os fatos conhecidos *a priori*), ou se puderem ser obtidas a partir de proposições anteriores (que já estão na lista) através da aplicação de regras de inferência. Esse processo continua até que a conclusão seja obtida.

Outra observação pertinente é o fato de na grande maioria dos sistemas para derivações formais o conjunto de regras de inferência ser fixo. Para os nossos propósitos, consideraremos o conjunto de regras de inferência apresentado pela Tabela 5.1, adaptada de Nicolletti (2009).

Alguns comentários relevantes acerca dos argumentos válidos serão apresentados. Primeiramente, a regra da inconsistência é válida, pois como $p \wedge \neg p$ é sempre avaliada como F, o argumento $p, \neg p \vdash q$ é sempre válido, uma vez que $F \rightarrow q$ é trivialmente verdade (condição conhecida como vacuidade).

Outro aspecto que merece destaque é referente à *regra de casos*. Essa regra é baseada na seguinte equivalência lógica:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q) \equiv ((p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)) \quad (5.2)$$

Isso nos permite escrever a seguinte equivalência:

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \equiv (p \vee \neg p) \rightarrow q \equiv V \rightarrow q \equiv F \vee q \equiv q \quad (5.3)$$

ou seja, $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ é uma tautologia, o que implica dizer que q é uma consequência lógica de $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ ou, em outras palavras, que $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash q$ é um argumento válido.

Tabela 5.1 Regras de inferência.

Regra de inferência	Nome da regra
$p, p \rightarrow q \models q$	<i>modus ponens</i> (MP)
$\neg q, p \rightarrow q \models \neg p$	<i>modus tollens</i> (MT)
$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	silogismo hipotético (SH ou regra da cadeia)
$p \vee q, \neg p \models q$	silogismo disjuntivo (SD)
$p \vee q, \neg q \models p$	silogismo disjuntivo (variante)
$p \wedge q \models p$	simplificação (S)
$p \wedge q \models q$	simplificação (variante)
$p, q \models p \wedge q$	conjunção (C)
$p \rightarrow q \models p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção (ABS)
$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \models q$	de casos (*)
$p \models p \vee q$	adição (AD)
$q \models p \vee q$	adição (variante)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \models q \vee s$	dilema construtivo (DC)
$p \rightarrow q, r \rightarrow s, \neg q \vee \neg s \models \neg p \vee \neg r$	dilema destrutivo (DD)
$p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$	contraposição (CP)
$p, \neg p \models q$	inconsistência (I)
$p \rightarrow q, q \rightarrow p \models p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência (IE)
$p \leftrightarrow q \models p \rightarrow q$	eliminação da equivalência (EE)
$p \leftrightarrow q \models q \rightarrow p$	eliminação da equivalência (variante)

5.4 Utilizando as regras de inferência

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos simples de aplicação das principais regras de inferência listadas na tabela anterior, na dedução de conclusões a partir de premissas dadas. Convém lembrar que tais regras de inferência nada mais são que argumentos válidos notáveis.

- **Regra da adição:** dada uma proposição verdadeira qualquer p , podemos deduzir sua disjunção com qualquer outra proposição q , isto é, $p \vee q$.

Exemplos:

a) Suponha a premissa inicial $(p \wedge q)$. Então, aplicando a *regra da adição*, podemos deduzir, por exemplo, $(p \wedge q) \vee r$ ou ainda $(p \wedge q) \vee s$.

b) $(x < 0) \models (x < 0) \vee (x = 2)$, pois $(x < 0) \vee (x = 2)$ é consequência lógica de $(x < 0)$.

c) Um exemplo em linguagem natural: o céu é azul. Logo, o céu é azul ou verde.

- **Regra da simplificação:** dada uma conjunção de duas proposições, $p \wedge q$, podemos deduzir cada uma das proposições individuais, p ou q .

Exemplos:

a) Suponha a premissa $(p \vee q) \wedge r$. Então, aplicando a *regra da simplificação*, podemos deduzir tanto $(p \wedge q)$ quanto r .

b) $(x \in A) \wedge (x \in B) \models (x \in A)$, pois obviamente $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

c) Um exemplo em linguagem natural: Débora toca piano e violão. Logo, Débora toca piano.

- **Regra da conjunção:** permite, a partir de duas proposições dadas p e q (premissas), deduzir sua conjunção, $p \wedge q$.

Exemplos:

a) Suponha as premissas $(p \vee q)$ e $\neg r$. Então, aplicando a *regra da conjunção*, podemos deduzir $(p \vee q) \wedge \neg r$.

b) $(x < 5), (x > 1) \models (x < 5) \wedge (x > 1)$, uma vez que, trivialmente, $(x < 5) \wedge (x > 1)$ é consequência lógica da conjunção das premissas.

c) Um exemplo em linguagem natural é: Rafael estuda. Rafael trabalha. Logo, Rafael estuda e trabalha.

- **Regra da absorção:** permite, a partir de uma condicional $p \rightarrow q$ dada como premissa, deduzir uma outra condicional com o mesmo antecedente p , mas cujo consequente é a conjunção de p com q , isto é, $p \rightarrow (p \wedge q)$.

Exemplos:

a) Suponha a premissa $(p \vee q) \rightarrow r$. Então, aplicando a *regra da absorção*, podemos deduzir $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$.

b) $(x \in A) \rightarrow (x \in A \cup B) \models (x \in A) \rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$, dado que $(x \in A) \rightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \cup B)$ é consequência lógica de $(x \in A) \rightarrow (x \in A \cup B)$.

c) Um exemplo em linguagem natural soa como uma repetição: se eu entro na água, então, eu entro na água e fico molhado.

- **Regra *modus ponens*:** esta lei, também conhecida como *regra de separação*, nos permite deduzir uma conclusão q , a partir das premissas $p \rightarrow q$ e p . É a regra mais utilizada em inferência lógica.

Exemplos:

a) Considere as premissas $(p \wedge q)$ e $(p \wedge q) \rightarrow r$. Então, aplicando a regra *modus ponens*, podemos deduzir r .

b) $(x \in A \cap B), ((x \in A \cap B) \rightarrow (x \in A)) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $(x \in A \cap B) \wedge ((x \in A \cap B) \rightarrow (x \in A))$.

c) Um exemplo em linguagem natural é: se chove, faz frio. Chove. Logo, faz frio.

- **Regra *modus tollens*:** permite, a partir da premissa $p \rightarrow q$ (condicional) e da negação do consequente, $\neg q$, deduzir a negação do antecedente, $\neg p$.

Exemplos:

- Considere as premissas $(q \wedge r) \rightarrow s$ e $\neg s$. Então, podemos deduzir $\neg(q \wedge r)$.
- Sejam as premissas $p \rightarrow \neg q$ e $\neg(\neg q)$. Aplicando *modus tollens* temos como conclusão a proposição $\neg p$.
- $((x \notin A) \rightarrow (x \notin A \cap B)), (x \in A \cap B) \models (x \in A)$, ou seja, $(x \in A)$ é consequência lógica de $((x \notin A) \rightarrow (x \notin A \cap B)) \wedge (x \in A \cap B)$. Em outras palavras, se x não pertence a A , então, x não pertence à intersecção de A com B . Agora, se é verdade que x pertence à intersecção de A com B , então x pertence à A .
- Um outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então eu não saio de casa. Eu saio de casa. Logo, não chove.

- **Regra do silogismo hipotético:** corresponde à propriedade transitiva do conectivo $\rightarrow$. Dadas duas condicionais como premissas, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$, de modo que o consequente da primeira seja idêntico ao antecedente da segunda, esta regra permite a dedução de uma outra condicional, $p \rightarrow r$ (conclusão). Devido a essa propriedade esta, lei também é conhecida como regra da cadeia.

Exemplos:

- Considere as premissas $\neg p \rightarrow (q \vee r)$ e $(q \vee r) \rightarrow \neg s$. Então, aplicando a *regra do silogismo hipotético*, podemos concluir $\neg p \rightarrow \neg s$.
- $(|x| = 0 \rightarrow x = 0), (x = 0 \rightarrow x + 1 = 1) \models (|x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$, ou seja, $(|x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$ é consequência lógica de $(|x| = 0 \rightarrow x = 0) \wedge (x = 0 \rightarrow x + 1 = 1)$.
- Outro exemplo em linguagem natural seria: se o sol se põe, então, fica

escuro. Se fica escuro, então, as luzes da cidade se acendem. Portanto, se o sol se põe, então, as luzes da cidade se acendem.

- **Regra do silogismo disjuntivo:** a partir de uma disjunção $p \vee q$, e da negação de uma das proposições, $\neg p$ (ou $\neg q$), esta regra permite deduzir a outra proposição.

Exemplos:

a) Considere as premissas $(p \wedge q) \vee r$ e $(\neg r)$. Então, aplicando a *regra do silogismo disjuntivo*, podemos deduzir $(p \wedge q)$.

b) $(x = 0 \vee x = 1), (x \neq 1) \models (x = 0)$, ou seja, $(x = 0)$ é consequência lógica de $(x = 0 \vee x = 1) \wedge (x \neq 1)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: Maria está falando baixo demais ou João tem problemas auditivos. Maria não está falando baixo demais. Portanto, João tem problemas auditivos.

- **Regra do dilema construtivo:** a partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos $(p \rightarrow q, r \rightarrow s)$, e a disjunção de seus antecedentes, $p \vee r$, esta regra permite concluir a disjunção dos consequentes destas condicionais, $q \vee s$.

Exemplos:

a) Considere as premissas $(p \wedge q) \rightarrow \neg r, s \rightarrow t$ e $(p \wedge q) \vee s$. Então, aplicando a *regra do dilema construtivo*, podemos deduzir $\neg r \vee t$.

b) $(x < y \rightarrow x = 1), (x > y \rightarrow x = 2), (x < y \vee x > y) \models (x = 1 \vee x = 2)$, ou seja, $(x = 1 \vee x = 2)$ é consequência lógica de $(x < y \rightarrow x = 1) \wedge (x > y \rightarrow x = 2) \wedge (x < y \vee x > y)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se estou com fome, então, como. Se estou com sede, então, bebo água. Estou com fome ou com sede. Logo, como ou bebo.

- **Regra do dilema destrutivo:** esta regra é bastante similar à anterior. A partir de três premissas, sendo duas condicionais com antecedentes e consequentes distintos ($p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$), e a disjunção da negação de seus consequentes, $\neg q \vee \neg s$, esta regra permite concluir a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais, $\neg p \vee \neg r$.

Exemplos:

a) Considere as premissas $\neg q \rightarrow r$, $p \rightarrow \neg s$ e $\neg r \vee s$. Então, aplicando a *regra do dilema destrutivo*, podemos deduzir $q \vee \neg p$.

b) $(x < 10 \rightarrow x = 1)$, $(x > 20 \rightarrow x = 2)$, $(x \neq 1 \vee x \neq 2) \models (x \geq 10 \vee x \leq 20)$, ou seja, $(x \geq 10 \vee x \leq 20)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow x = 1) \wedge (x > 20 \rightarrow x = 2) \wedge (x \neq 1 \vee x \neq 2)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se há luz do sol, então, é dia. Se chove, então, há nuvens no céu. Não é dia ou não há nuvens no céu. Logo, não há luz do sol ou não chove.

- **Regra de casos:** a partir de duas premissas condicionais com mesmo consequente e antecedentes complementares ($p \rightarrow q$, $\neg p \rightarrow q$), esta regra permite concluir o antecedente comum destas condicionais, q .

Exemplos:

a) Considere as premissas $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$, $\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)$. Então, aplicando a *regra de casos*, podemos deduzir $(\neg q \wedge r)$.

b) $(x < 10 \rightarrow y = 1)$, $(x \geq 10 \rightarrow y = 1) \models (y = 1)$, ou seja, $(y = 1)$ é consequência lógica de $(x < 10 \rightarrow y = 1) \wedge (x \geq 10 \rightarrow y = 1)$.

c) Outro exemplo em linguagem natural seria: se chove, então, não saio de casa e estudo. Se não chove, então, não saio de casa e estudo. Logo, não saio de casa e estudo.

5.4.1 Exercícios resolvidos

1) Escreva cada um dos argumentos válidos a seguir na forma condicional:

a) $\neg p, \neg q \rightarrow p \models q$

Solução: sabemos que se argumento acima é válido, então, q é consequência lógica das premissas, ou seja, escrevendo na forma condicional, temos:

$$(\neg p \wedge (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow q$$

b) $p \rightarrow q \models \neg(p \wedge \neg q)$

Solução: escrevendo na forma condicional temos a seguinte proposição tautológica:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

c) $p, p \rightarrow q, \neg q \vee (r \wedge s) \models (r \wedge s)$

Solução: reescrevendo o argumento válido na forma condicional, temos a tautologia:

$$(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s))) \rightarrow (r \wedge s)$$

2) Utilize cada uma das regras de inferência citadas para concluir adequadamente cada um dos seguintes conjuntos de premissas:

a) modus ponens

$$P1: (x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z$$

$$P2: x > y \wedge y > z$$

$$C: x > z \quad \Leftarrow \text{MP em P1 e P2}$$

b) modus tollens

$$P1: (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s)$$

$$P2: \neg(\neg(r \wedge s))$$

$$C: \neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \quad \Leftarrow \text{MT em P1 e P2}$$

c) silogismo disjuntivo

$$P1: (s \rightarrow p) \vee (r \wedge t)$$

$$P2: \neg(r \wedge t)$$

$$C: (s \rightarrow p) \equiv (\neg s \vee p) \quad \Leftarrow \text{SD em P1 e P2}$$

d) silogismo hipotético

$$P1: (s \vee t) \rightarrow (r \wedge q)$$

$$P2: (r \wedge q) \rightarrow \neg p$$

$$C: (s \vee t) \rightarrow \neg p \quad \Leftarrow \text{SH em P1 e P2}$$

e) dilema construtivo

$$P1: p \rightarrow r$$

$$P2: \neg q \rightarrow \neg s$$

$$P3: p \vee \neg q$$

$$C: (r \vee \neg s) \quad \Leftarrow \text{DC em P1, P2 e P3}$$

f) dilema destrutivo

$$P1: p \rightarrow (\neg r \wedge q)$$

$$P2: \neg(\neg r \wedge q) \vee \neg s$$

$$P3: \neg q \rightarrow s$$

$$C: (\neg p \vee \neg\neg q) \equiv (\neg p \vee q) \quad \Leftarrow \text{DD em P1, P3 e P2}$$

Note que o argumento é válido independentemente da ordem em que as premissas aparecem.

5.5 Validade de argumentos mediante tabelas-verdade

As tabelas-verdade são ferramentas poderosas na verificação da validade de argumentos. Suponha que se deseja testar a validade do seguinte argumento:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q \quad (5.4)$$

Uma maneira de resolver este problema consiste em verificar se q é con-

sequência lógica das premissas $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Para isso, basta verificar se a forma condicional do argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ é uma tautologia. Esse problema foi objeto de estudo da unidade 3 do nosso curso (consequência e equivalência lógicas). A seguir veremos alguns exemplos de como verificar a validade de argumentos mediante tabelas-verdade.

Exemplo 1: verificar mediante tabela-verdade se é válido o argumento $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$.

Solução:

O primeiro passo consiste na especificação da forma condicional do argumento, que é $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$. A seguir, construímos a tabela-verdade para a proposição resultante:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como a forma condicional do argumento não é uma tautologia, $\neg q$ não é consequência lógica das premissas e, portanto, o argumento em questão não é válido.

Exemplo 2: verificar mediante tabela-verdade se é válido o argumento seguinte.

Se $x = 0$, então $x + y = y$

Se $y = z$, então $x + y \neq y$

Logo, se $x = 0$, então $y \neq z$

Solução:

O primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples $x = 0$ de p , $x + y = y$ de q e $y = z$ de r , o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como:

$$p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash p \rightarrow \neg r \quad (5.5)$$

Assim, para verificar se o argumento é válido basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \quad (5.6)$$

A tabela-verdade para a proposição resultante é dada por:

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$(p \rightarrow q)$	$(r \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow \neg r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$	P
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Como a forma condicional do argumento é uma tautologia, ou seja, a

proposição $(p \rightarrow \neg r)$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

Exemplo 3: verificar mediante tabela-verdade a validade do argumento seguinte.

Se Carlos está com fome, então, ele come.

Carlos dorme ou não come.

Carlos está acordado.

Portanto, Carlos não está com fome.

Observação: dormir é equivalente a não estar acordado.

Solução:

Assim como o exemplo anterior, o primeiro passo consiste na representação do argumento acima na forma simbólica, em termos de proposições simples. Chamando as proposições simples *Carlos está com fome*, *Carlos come* e *Carlos está acordado* de p , q e r , respectivamente, o argumento pode ser escrito na linguagem da lógica proposicional como:

$$p \rightarrow q, \neg r \vee \neg q, r \vdash \neg p \quad (5.7)$$

Assim, para verificar se o argumento é válido, basta checar se sua forma condicional é uma tautologia (ou seja, verificar se a conclusão é consequência lógica das premissas). A forma condicional do argumento é dada por:

$$P = (((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r) \rightarrow \neg p) \quad (5.8)$$

A tabela-verdade para a proposição resultante é mostrada a seguir.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg r \vee \neg q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge r$	P
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V

Como a forma condicional do argumento é tautológica, ou seja, $\neg p$ é consequência lógica das premissas, o argumento em questão é válido.

5.6 Validade de argumentos mediante regras de inferência

Apesar de funcional, o método baseado em tabelas-verdade torna-se cada vez mais ineficiente e trabalhoso à medida que o número de proposições simples aumenta. Uma maneira mais elegante e eficiente de verificar a validade de argumentos é mediante o uso de regras de inferência. A ideia consiste em concluir logicamente a partir das premissas, utilizando as regras descritas nas seções 1.1 e 1.2. Essa abordagem representa a essência do cálculo proposicional. A seguir veremos uma série de exemplos de como testar a validade de argumentos através de regras de inferência.

Exemplo 4: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$.

Solução:

A sequência de regras de inferência aplicadas para a resolução do problema é mostrada na tabela abaixo. Primeiramente, apenas copiamos as pre-

missas do argumento no início da sequência. A seguir, por sucessivas aplicações das regras de inferência nas proposições já existentes, chega-se à conclusão, o que verifica a validade do argumento. Tal procedimento é uma descrição bastante informal do conceito de prova ou dedução, que será apresentado de maneira detalhada na unidade 6.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$p \wedge r$	premissa	
(3)	p	simplificação	2
(4)	q	<i>modus ponens</i>	1, 3

Aplicando a *regra da simplificação* na segunda premissa, inferimos p . De p (premissa 3) e $p \rightarrow q$ (premissa 1), aplicando a regra *modus ponens*, chega-se à conclusão q . Portanto, como concluímos q a partir das premissas, o argumento dado é válido.

Exemplo 5: verificar mediante regras de inferência a validade do argumento $p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow r, \neg(p \wedge r) \vdash \neg p$.

Solução:

Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg(p \wedge r)$	premissa	
(4)	$p \rightarrow (p \wedge q)$	absorção	1
(5)	$p \rightarrow r$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$p \rightarrow (p \wedge r)$	absorção	5
(7)	$\neg p$	<i>modus tollens</i>	3, 6

Exemplo 6: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t \quad (5.9)$$

Solução: note que nesse caso o argumento é composto por 5 proposições simples, o que resultaria em uma tabela-verdade de 32 linhas. Esse é um exemplo concreto de caso em que a verificação via tabela-verdade é ineficiente e bastante trabalhosa. Por essa razão, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	<i>modus ponens</i>	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	4, 8

Exemplo 7: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \vee q) \rightarrow r, (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), (p \wedge s) \vdash s \leftrightarrow t \quad (5.10)$$

Solução: note que, assim como no caso anterior, o argumento é composto por 5 proposições simples, o que resultaria em uma tabela-verdade de 32 linhas. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \vee q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	premissa	
(3)	$(p \wedge s)$	premissa	
(4)	p	simplificação	1
(5)	$p \vee q$	adição	3, 4
(6)	r	<i>modus ponens</i>	1, 5
(7)	$r \vee q$	adição	6
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	2, 7
(9)	$(s \leftrightarrow t)$	<i>modus ponens</i>	4, 8

Exemplo 8: verificar que o argumento seguinte é válido.

$$(p \wedge q) \rightarrow r, r \rightarrow s, t \rightarrow \neg u, t, \neg s \vee u \vdash \neg p \vee \neg q \quad (5.11)$$

Solução: trata-se de outro exemplo em que a verificação mediante tabela-verdade é inviável. Por esse motivo, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premissa	
(2)	$r \rightarrow s$	premissa	
(3)	$t \rightarrow \neg u$	premissa	
(4)	t	premissa	
(5)	$\neg s \vee u$	premissa	
(6)	$\neg u$	<i>modus ponens</i>	3, 4
(7)	$\neg s$	silogismo disjuntivo	5, 6
(8)	$\neg r$	<i>modus tollens</i>	2, 7
(9)	$\neg(p \wedge q)$	<i>modus tollens</i>	1, 8
(10)	$\neg p \vee \neg q$	De Morgan	9

Exemplo 9: testar a validade do argumento seguinte.

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), t \rightarrow u, u \rightarrow v, \neg(q \wedge v) \vdash \neg(p \wedge t) \quad (5.12)$$

Solução: nesse caso, teríamos uma tabela-verdade com 128 linhas. Novamente, verificaremos a validade do argumento através de regras de inferência. Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$	premissa	
(2)	$t \rightarrow u$	premissa	
(3)	$u \rightarrow v$	premissa	
(4)	$\neg(q \wedge v)$	premissa	
(5)	$t \rightarrow v$	silogismo hipotético	2, 3
(6)	$p \rightarrow q$	simplificação	1
(7)	$\neg q \vee \neg v$	De Morgan	4
(8)	$\neg p \vee \neg t$	dilema destrutivo	5, 6, 7
(9)	$\neg(p \wedge q)$	De Morgan	8

O exemplo a seguir foi originalmente descrito em Nicoletti (2009).

Exemplo 10: considere o argumento seguinte.

Se as uvas caem, então, a raposa as come.

Se a raposa as come, então, estão maduras.

As uvas estão verdes ou caem.

Logo, a raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Identificando as proposições atômicas nas sentenças em linguagem natural escritas neste exemplo, tem-se:

p : as uvas caem

q : a raposa come as uvas

r : as uvas estão maduras

Reescrevendo na linguagem da lógica proposicional, temos o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q \quad (5.13)$$

Considerando a sequência de passos a seguir, mostramos que o argumento em questão é válido.

(1)	$p \rightarrow q$	premissa	
(2)	$q \rightarrow r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee p$	premissa	
(4)	$r \rightarrow p$	equivalência lógica	3
(5)	$q \rightarrow p$	silogismo hipotético	2, 4
(6)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	conjunção	1, 5
(7)	$p \leftrightarrow q$	introdução da equivalência	6

5.7 Conclusões

Esta unidade apresentou o conceito de argumento válido, bem como duas abordagens distintas de se verificar a validade de argumentos em geral: a primeira, baseada na construção de tabelas-verdade, e a segunda, mais geral e eficiente (pois é viável mesmo quando o número de proposições atômicas cresce), através da utilização de um conjunto pré-estabelecido de regras de inferência, o que é essencialmente o cálculo proposicional. Também vimos como o cálculo proposicional pode ser aplicado em sentenças da linguagem natural, permitindo a derivação de conclusões várias vezes não intuitivas. Na próxima unidade será introduzido o conceito de prova formal, que será empregado em conjunto com

técnicas dedutivas para a demonstração da validade de argumentos, bem como de teoremas.

5.8 Estudos complementares

Para um tratamento mais formal e aprofundado do assunto apresentado, os leitores interessados podem consultar Souza (2008), Hilbert & Ackermann (1999) e Rautemberg (2010).

5.9 Exercícios

1) Verificar, mediante tabela-verdade, a validade dos argumentos:

- a) $p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash r \rightarrow \neg p$
- b) $p \rightarrow \neg q, r \rightarrow p, q \vdash \neg r$
- c) $p \rightarrow q, r \vee \neg q, \neg r \vdash \neg p$
- d) $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vdash p \rightarrow r$
- e) $p \rightarrow \neg q, p, \neg q \rightarrow r \vdash r$
- f) $p \wedge \neg q, \neg r \rightarrow q \vdash p \wedge q$
- g) $p \vee (q \vee r), \neg p, \neg r \vdash q$
- h) $p \vee \neg q, \neg p, \neg(p \wedge r) \rightarrow q \vdash r$

2) Utilizando tabelas-verdade, mostre a validade dos argumentos:

- a) $p \rightarrow \neg q, q, \neg p \rightarrow (r \wedge s) \vdash r \wedge s$
- b) $p \rightarrow (q \wedge r), \neg(q \wedge r), \neg p \rightarrow s \vdash \neg p \wedge s$
- c) $p \vee q, q \rightarrow r, \neg r \vee s \vdash s$
- d) $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow (p \wedge q), s \vdash q \vee r$
- e) $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s \vdash r \wedge (p \vee q)$

3) Verificar, mediante regras de inferência, a validade dos argumentos:

- a) $p \wedge \neg q, q \vee \neg r, s \rightarrow r \vdash p \wedge \neg s$

- b) $p \vee \neg q, \neg q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg r \vdash s$
- c) $p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r, r, p \vee (s \wedge t) \vdash s$
- d) $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s \vdash r \wedge (p \vee q)$
- e) $\neg p \vee \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, \neg p \rightarrow t, \neg t \vdash \neg r \wedge \neg t$
- f) $p \rightarrow \neg q, p \vee r, r \rightarrow \neg q, s \rightarrow q, t \vdash \neg s \wedge t$
- g) $\neg p \rightarrow q, q \rightarrow (r \wedge s), p \rightarrow t, \neg t \vdash s$
- h) $p \rightarrow q, \neg q \wedge \neg r, \neg r \rightarrow s \vdash \neg p \wedge s$
- i) $p \rightarrow q, p \vee r, \neg r \vdash q \vee s$
- j) $p \rightarrow q, q \rightarrow r, (p \rightarrow r) \rightarrow \neg s, s \vee t \vdash t$
- k) $p \vee \neg q, \neg r, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow s \vdash s$
- l) $r \rightarrow t, s \rightarrow q, (t \vee q) \rightarrow \neg p, r \vee s \vdash \neg p$
- m) $p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg s, (p \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg t, r \rightarrow t \vdash \neg r$
- n) $(p \vee q) \rightarrow \neg r, s \rightarrow p, t \rightarrow q, s \vee t \vdash u \vee \neg r$

4) Utilize as regras de inferência para verificar a validade dos argumentos:

- a) $(p \vee q) \rightarrow \neg r, p, s \rightarrow r \vdash \neg s$
- b) $p \wedge (q \vee r), (q \vee r) \rightarrow \neg s, s \vee t \vdash t$
- c) $(p \vee q) \rightarrow \neg r, q, (s \wedge t) \rightarrow r \vdash \neg(s \wedge t)$
- d) $p \rightarrow q, \neg q, (\neg p \vee \neg r) \rightarrow s \vdash s$
- e) $p \vee (q \wedge r), q \rightarrow s, r \rightarrow t, (s \wedge t) \rightarrow (p \vee r), \neg p \vdash r$
- f) $q \vee (r \rightarrow t), q \rightarrow s, \neg s \rightarrow (t \rightarrow p), \neg s \vdash r \rightarrow p$
- g) $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \wedge t)), p \wedge r \vdash t \vee u$

5) Para cada um dos itens a seguir, identifique os átomos, construa o argumento e verifique sua validade.

a) Se Deus existe, então, a vida tem significado.

Deus existe.

Portanto, a vida tem significado.

b) Deus não existe.

Se Deus existisse, a vida teria significado.

Portanto, a vida não tem significado.

c) Se hoje for quinta-feira, então, amanhã será sexta-feira.

Se amanhã for sexta, então, depois de amanhã será sábado.

Portanto, se hoje for quinta, então, depois de amanhã será sábado.

d) Hoje é um fim de semana se e somente se hoje for sábado ou domingo.

Hoje não é sábado.

Hoje não é domingo.

Portanto, hoje não é um fim de semana.

e) Ela não está em casa ou não está atendendo ao telefone.

Mas se ela não está em casa, então, ela foi sequestrada.

Se ela não atende ao telefone, então, ela está correndo perigo.

Portanto, ela foi sequestrada ou ela está correndo perigo.

6) Considere as seguintes premissas:

Se o universo é finito, então, a vida é curta.

Se a vida vale a pena, então, a vida é complexa.

Se a vida é curta ou complexa, então, a vida tem sentido.

A vida não tem sentido.

Verifique, via regras de inferência, a validade dos seguintes argumentos:

a) A vida não é curta.

b) A vida não é complexa ou o universo não é finito.

c) Se o universo é finito e a vida vale a pena, então a vida tem sentido.

d) A vida vale a pena se e somente se a vida tem sentido.

e) O universo não é finito e a vida não vale a pena.

5.10 Referências

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1999.

NICOLETTI, M. C. *A Cartilha da Lógica*. 2. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

RAUTENBERG, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

5.11 Referências consultadas

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

GUIMARÃES, J. O. *Introdução à Lógica Matemática*. Disponível em:

<[http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica para Computacao.pdf](http://www2.dc.ufscar.br/~jose/courses/09-1/LC/Logica%20para%20Computacao.pdf)>.

Acesso em: 15 out. 2011.